Mathematics

MAY 3

D13

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 162

Heft 2

Ausgegeben den 12. Mai 1930

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930

Jährlich 8 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 162. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

König, Robert und **Schmidt, Hermann,** Über Polynom- und allgemeinere Funktionssysteme, die aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen II 69

Löbell, Frank, Ein Satz über die eindeutigen Bewegungen Clifford-Kleinscher Flächen in sich 114

— — Zur Frage der Struktur der geschlossenen geodätischen Linien in den offenen Clifford-Kleinschen Flächen mit positiver Charakteristik 125

Baer, Reinhold, Eine Anwendung der Kontinuumhypothese in der Algebra . . . 132

Hasse, Helmut, Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols 134

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Über Polynom- und allgemeinere Funktionssysteme, die aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen II.

Von *Robert König* und *Hermann Schmidt* in Jena.

Herrn Professor **Dr. h. c. Dr. ing. e. h. Straubel**
zur Eröffnung des neuen Mathematischen Instituts der Universität Jena gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	69—71
I. Abschnitt. Arithmetischer Teil	71—78
§ 1. Reduktionsformeln und Differenzengleichung	71
§ 2. Ableitungsformeln und Differentialgleichung	76
II. Abschnitt. Transzendenter Teil	78—98
§ 1. Die Integrale und ihre analytische Fortsetzung	78
§ 2. Die Probleme der linearen Unabhängigkeit und die Riemannsche Klasse im allgemeinen Fall	83
§ 3. Die Ausnahmefälle und das Randwertproblem	90
III. Abschnitt. Asymptotische Darstellungen und Reihenentwicklungen	98—108
§ 1. Der Satz von Poincaré und die asymptotischen Formeln	98
§ 2. Reihenentwicklungen	104
Anhang (Einordnung bekannter Sonderfälle)	108—112
1. Die Legendreschen Funktionen	108
2. Die Gegenbauer-Nielsenschen Funktionen	110
3. Der Pincherlesche Fall	110

Einleitung.

Die gegenwärtige Arbeit bildet die Weiterführung einer im Bd. 159 (1928) dieses Journals erschienenen Abhandlung von R. König: Über Polynomsysteme, die aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen I [1]). Es handelt sich dort um die Untersuchung der Polynomsysteme einer komplexen Veränderlichen z, welche als Residuen der rationalen Differentiale $\tau^l f^m d\tau$ [2]) in der komplexen τ-Ebene erscheinen. ($f = \tau^n - nz\tau + n - 1$; l beliebig ganz, m negativ ganz.) Im folgenden wird diese Untersuchung ausgedehnt auf den Fall, daß die *Exponenten nicht* mehr notwendig *ganzzahlig*, sondern beliebige komplexe Zahlen der Form $\lambda + l$, $\mu + m$ sind (l, m die „ganzzahligen Bestandteile"). Es handelt sich dann um *Differentiale* $dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} = \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m} d\tau$, welche einer im „allgemeinen Fall" bei $\tau = 0, \infty$ und den Wurzeln $t_1, t_2, \ldots, t_n$ von $f(t, z) = 0$ verzweigten *multiplikativen Klasse* angehören, und ihre nach τ gebildeten *Integrale* als Funktion von z.

[1]) Zitiert mit K I; es wird im wesentlichen nur die Kenntnis des dortigen § 1 (hypozykloidische Abbildung) vorausgesetzt. — Die weiteren Zitate erfolgen durch Angabe des Verfassernamens und der Nummer im Schriftenverzeichnis am Schluß.

[2]) Bei K I ist λ für l und $-m$ für m geschrieben.

Die Arbeit gliedert sich in drei Abschnitte:

Im I., *arithmetischen Teil* werden über dem Körper der rationalen Funktionen $R(z)$ *Moduln* der Form $\sum_l R_l(z)\, dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}$ bei festem m hinsichtlich ihrer Darstellbarkeit durch eine *Basis* studiert. Dies führt zu einer linearen homogenen *Differenzengleichung* hinsichtlich l mit in l linearen Koeffizienten. Bei Einführung der Ableitungen nach z gelangt man zu einer *Differentialgleichung* n-ter Ordnung vom Fuchsschen Typ mit den singulären Punkten $z^n = 1$, die als Verallgemeinerung der Legendreschen Differentialgleichung anzusehen ist.

Im II. *Abschnitt*[1]) erfolgt der Übergang zu den *Integralen* $\int \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m}\, d\tau$, die jetzt im Unterschied von K I *im allgemeinen* über Jordan-Pochhammersche[2]) *Doppelschleifen* zu erstrecken sind. Wählt man n passende Wege C_j aus, so erhält man (bei festem m) zu jedem l in der Form $\int_{C_j} dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}$ n Lösungen der Differentialgleichung, die ein *Fundamentalsystem* bilden. Sieht man l als ganzzahlig variabel an, so bilden sie zugleich ein F. S. der Differenzengleichung. Der obigen Modulbasis entspricht eine *Basis für eine Klasse Riemannscher Funktionensysteme*, der nämlichen, die durch die Differentialgleichung für ein festes l definiert wird, und die sich überdies nachträglich als von m unabhängig erweist. Die *Gruppe* der Klasse wird vollständig bestimmt mit Hilfe der Methode der veränderlichen Integrationswege[3]). Für spezielle Werte λ, μ (*Ausnahmefälle*) erhält man *Polynomlösungen* als Residuen an unverzweigten singulären Stellen der τ-Ebene. Diese können als *Eigenlösungen* der linearen Differentialgleichung angesehen werden, sofern man Unverzweigtheit der Lösungen an den singulären Stellen ($z^n = 1$) fordert.

III.[4]) Das *asymptotische Verhalten* der Legendreschen Polynome für große Indizes ist seit langem untersucht[5]). Auch in unserem Falle läßt sich das asymptotische Verhalten für $|l| \to \infty$ auf Grund einer Untersuchung von Perron[6]) ermitteln. Das *Ergebnis* läßt sich so aussprechen: Jedes Element des aufgestellten F. S. der Differenzengleichung ist asymptotisch proportional $\mathsf{T}^l |l|^{-\mu-m-1}$, wenn T eine geeignete Wurzel von $f(t, z) = 0$ ist. Beschränkt man sich auf einen Bereich, in dem die Beträge dieser Wurzeln T_j sämtlich verschieden sind, so folgt daraus

$$\lim_{l \to \pm\infty} \frac{y_{l\pm1}}{y_l} = \mathsf{T}^{\pm 1},$$

für irgendeine Lösung y_l, wie es nach dem Poincaréschen Satze sein muß. Die linearen Lösungsscharen, die einem bestimmten T_j entsprechen, sind angebbar. Für $n = 2$ erhält man das von Poincaré[7]) selbst angegebene Beispiel.

Die in Abschnitt II gewonnenen Funktionssysteme lassen sich für $\lambda = 0$ zu *Reihen-*

---

[1]) Die Bestimmung der Gruppe, der Beweis der linearen Unabhängigkeit und die Diskussion der Ausnahmefälle stammt von H. Schmidt. — R. K.

[2]) Siehe Schriftenverzeichnis 6., 17.

[3]) Vgl. insbes. *Nekrassoff* 9., der jedoch S. 544 ff. nur den Fall durchführt, wo — in unserer Bezeichnung der Veränderlichen — für einen singulären Wert z^* zwei der variablen Verzweigungspunkte t_1, t_2 derart in t^* zusammenfallen, daß beim Umlauf von z um z^* jeder nach einfachem Umlauf um t^* in seine Ausgangslage zurückkehrt, so daß also das Gebilde (z, t) in (z^*, t^*) einen einfachen Doppelpunkt (oder Selbstberührungspunkt) hat.

[4]) Dieser Abschnitt stammt ausschließlich von H. Schmidt. — R. K.

[5]) *Darboux* 2., S. 20 ff.

[6]) *Perron* 14.; für die Polynome auch 13., S. 369, bzw. *Darboux* 2., S. 19/20.

[7]) *Poincaré* 18., S. 252, vgl. auch *Nörlund* 11., S. 310/311.

entwicklungen benützen, in deren Aufstellung wir dem von Pincherle [1]) angewandten Verfahren folgen. Man erhält mit Hilfe der Differenzengleichung die *Bilinearreihe*

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^\infty c_l\, p_l(z)\, q_l(\zeta).$$

Dabei sind die $p_l(z)$ [2]) die oben für $\lambda = 0$ (Ausnahmewert) erhaltenen *Polynome.* Die $c_l\, q_l(\zeta)$ können im Sinne der Krafftschen Erweiterung der Faberschen Theorie als die ihnen *zugeordneten Funktionen* angesehen werden [3]). Dieselben genügen in unserem Falle ebenfalls einer Differentialgleichung obigen Typs, die jedoch zu einem Exponenten $\mu' = 1 - \mu$ (bzw. $-\mu$) gehört. $\mu = \mu'$ führt auf den ausgezeichneten Fall $\mu = \frac{1}{2}$.

Die *Konvergenzbetrachtung* wird unmittelbar auf Grund der asymptotischen Darstellung geführt, und zwar konvergiert die Bilinearreihe gleichmäßig für $|\mathsf{T}_1(z)| \geqq r$, $|\mathsf{T}_1(\zeta)| \leqq \varrho$, wo $0 < \varrho < r < 1$ und $\mathsf{T}_1(z)$ die absolut kleinste Wurzel von $f(t, z) = 0$ bedeutet. Man schließt hieraus in bekannter Weise auf die eindeutige *Entwickelbarkeit einer* in

$$|\mathsf{T}_1(z)| > R \text{ bzw. } |\mathsf{T}_1(z)| < R \qquad (0 \leqq R < 1)$$

regulären Funktion nach den Polynomen $p_l(z)$ bzw. den zugeordneten Funktionen $q_l(z)$. Die Begrenzungslinie $|\mathsf{T}_1(z)| = R$ für $(R > 0)$ ist eine singularitätenfreie *Hypozykloide*, welche die n-spitzige Hypozykloide $|\mathsf{T}_1(z)| = 1$ im Innern läßt.

Im *Anhang* behandeln wir kurz die bekannten *Spezialfälle* der

1. Legendreschen Funktionen $\left(n = 2;\ m = -1;\ \mu = \frac{1}{2}\right)$,
2. Gegenbauer-Nielsenschen „metasphärischen" Funktionen [4]) $(n = 2;\ \mu, m$ bel.),
3. Pincherleschen Funktionen [5]) $\left(n = 3;\ m = -1;\ \lambda = 0;\ \mu = \frac{1}{2}\right)$.

Die etwas breiteren Ausführungen zu 1. haben den Zweck, bekannte, gewöhnlich mehr durch Einzelrechnungen abgeleitete Ergebnisse als organisch aus unserer allgemeineren Theorie erwachsend aufzuweisen. Auch der S. 110/111 gegebene Konvergenzbeweis für die Heinesche Reihe scheint uns gegenüber bekannten Darstellungen merklich vereinfacht. — Unter den Annahmen 1., 3. wird die multiplikative Klasse algebraisch. Auf die allgemeinen *algebraischen*, insbes. hyperelliptischen *Fälle* wird am Schluß von II (S. 97/98) kurz eingegangen. In diesen Fällen berühren sich unsere Untersuchungen mit den bekannten Fuchsschen betreffend die Abhängigkeit der Periodizitätsmoduln eines Abelschen Integrals von einem variablen Verzweigungspunkt.

I. Abschnitt. Arithmetischer Teil.

§ 1. Reduktionsformeln und Differenzengleichung.

Wie in K I seien τ, z komplexe Veränderliche und

$$(1) \qquad f(\tau, z) = \tau^n - nz\tau + n - 1 \qquad (n \text{ ganz } \geqq 2).$$

Wir studieren *Differentiale* der Form

---

[1]) *Pincherle* 16.

[2]) In abgeänderter Indexbezeichnung!

[3]) *Krafft* 8., *Faber* 3.

[4]) s. etwa *Nielsen* 10.

[5]) *Pincherle* 16.

$$dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} = \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m}(\tau, z)\, d\tau \tag{2}$$

und deren *Integrale* nach τ als Funktionen von z. Dabei sind $\lambda + l$, $\mu + m$ beliebige komplexe Zahlen und die „reduzierten Exponenten" λ, μ durch die Festsetzung l, m ganz, $\left\{\begin{matrix} 0 \leqq \Re(\lambda) < 1 \\ 0 \leqq \Re(\mu) < 1 \end{matrix}\right\}$ bestimmt. Die *Diskriminante* der Gleichung

$$f(t, z) = (t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_n) = 0$$

ist bis auf einen von z unabhängigen Faktor $z^n - 1$. Für jedes feste z mit $z^n - 1 \neq 0$ sind daher die n-Wurzeln t_h voneinander verschieden. Es sei $\mathfrak{E}$ das Innere der von den Punkten $\varepsilon_h = e^{\frac{2\pi i h}{n}}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ radial ins Unendliche aufgeschnittenen z-Ebene, z in $\mathfrak{E}$ angenommen, und dann mit $\mathfrak{F}_z$ das Innere der ebenso von $\tau = 0$ längs der positiven reellen Achse, von den t_h radial aufgeschnittenen τ-Ebene bezeichnet. Als Funktion von τ betrachtet, ist dann $\tau^{\lambda+l} f^{\mu+m}$ in $\mathfrak{F}_z$ eindeutig und regulär, sobald man dem Ausdruck $\tau^{\lambda} f^{\mu}$ an einer Stelle $\tau = \tau_0$ einen der (für $|\lambda| + |\mu| > 0$) verschiedenen möglichen Werte zugeschrieben hat. Beim Umlauf um die Punkte $\tau = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \infty$ erweisen sich die Funktionen $\tau^{\lambda+l} f^{\mu+m}$ bzw. Differentiale $dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}$ als *multiplikativ* mit den *Multiplikatoren*

$$\Lambda = e^{2\pi i \lambda},\ \mathsf{M} = e^{2\pi i \mu},\ \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n} = e^{-2\pi i(\lambda + n\mu)},$$

die falls eine oder mehrere der Bedingungen $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\lambda + n\mu$ ganz erfüllt, teilweise oder sämtlich zu 1 werden. Die letzte Möglichkeit, die in K I behandelt ist [1]), schließen wir hier durch die ständige Annahme $\mu \neq 0$ aus; λ dagegen bleibe beliebig [2]).

Alle Funktionen $R(\tau, z)\,\tau^{\lambda} f^{\mu}(\tau, z)$, wo $R(\tau, z)$ eine rationale Funktion von τ, eine beliebige (analytische) Funktion von z ist, bilden eine *Klasse* multiplikativer Funktionen von τ. Wir beschränken uns jedoch sofort auf den Fall, daß $R(\tau, z)$ ein Polynom in τ, $\frac{1}{\tau}$; f, $\frac{1}{f}$ mit in z rationalen Koeffizienten ist. So gelangt man zu einem in der multiplikativen Klasse enthaltenen *Modul* $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$, dessen Elemente die endlichen Summen der Form sind

$$\sum_{l,m} Q_{lm}(z)\, \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m}. \tag{3}$$

Der Koeffizientenbereich ist der Körper $\mathsf{K}(z)$ der rationalen Funktionen von z mit beliebigen Zahlkoeffizienten. Den entsprechend bei Zugrundelegung des Polynombereichs $\mathsf{K}[z]$ gebildeten Modul wollen wir mit $\mathfrak{m}_{\lambda\mu}$ bezeichnen. Ferner definieren wir analog $\mathfrak{M}'_{\lambda\mu}$ und $\mathfrak{m}'_{\lambda\mu}$ für die Differentiale und behandeln jetzt den *Aufbau von* $\mathfrak{M}'_{\lambda\mu}$ *aus Unterbereichen*. Zunächst entsteht $\mathfrak{M}'_{\lambda\mu}$ aus $\mathfrak{m}'_{\lambda\mu}$ durch Übergang von $\mathsf{K}[z]$ zu $\mathsf{K}(z)$. $\mathfrak{m}'_{\lambda\mu}$ enthält nun in sich unendlich viele Module $\mathfrak{m}'_m$, deren Elemente die Differentiale

$$\sum_{l} g_l(z)\, dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} \tag{4}$$

mit Koeffizienten $g_l(z)$ aus $\mathsf{K}[z]$ sind. $\mathfrak{m}'_{\lambda\mu}$ ist (in der in der Zahlentheorie üblichen Ausdrucksweise) der größte gemeinsame Teiler der unendlich vielen Moduln $\mathfrak{m}'_m$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Über die *Beziehung der* $\mathfrak{m}'_m$ *zueinander* gilt

---

[1]) Allerdings mit der Einschränkung $m < 0$.

[2]) Von der eingehenden Behandlung des Falles $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ sehen wir damit ab.

Satz 1. $\mathfrak{m}'_m$ *ist in* $\mathfrak{m}'_{m-1}$ *enthalten*, oder also

$$\ldots \mathfrak{m}'_{m-1} \supsetneq \mathfrak{m}'_m \supsetneq \mathfrak{m}'_{m+1} \ldots$$

Man hat nämlich

$$dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} = \tau^{\lambda+l}(\tau^n - nz\tau + n - 1)^{\mu+m}\, d\tau = (\tau^{\lambda+l+n} - nz\tau^{\lambda+l+1} + (n-1)\,\tau^{\lambda+l})\, f^{\mu+m-1}\, d\tau,$$

also

$$\text{(5) I.} \qquad dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} = dv_{\lambda+l+n}^{(\mu+m-1)} - nz\, dv_{\lambda+l+1}^{(\mu+m-1)} + (n-1)\, dv_{\lambda+l}^{(\mu+m-1)},$$

woraus die Behauptung folgt.

Nunmehr gehen wir zur Untersuchung *eines und desselben Moduls* $\mathfrak{m}'_m$ über.

Zur Vorbereitung bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}'^0_{\lambda\mu}$ den in der Menge $\mathfrak{m}'_{\lambda\mu}$ enthaltenen ausgezeichneten *Modul der vollständigen Differentiale* der Funktionen von $\mathfrak{m}_{\lambda\mu}$. Er besteht aus den Differentialen

$$\text{(6)} \qquad dF = \left(\frac{\partial F(\tau, z)}{\partial \tau}\right)_{z=\text{konst.}} d\tau, \qquad \text{wofür } F(\tau, z) \in \mathfrak{m}_{\lambda\mu}.$$

Definition. Zwei Differentiale dV_1, dV_2 aus $\mathfrak{m}'_{\lambda\mu}$ heißen *kongruent* (nach dem Modul $\mathfrak{m}'^0_{\lambda\mu}$, — was wir aber künftig weglassen):

$$dV_1 \equiv dV_2, \text{ wenn ihre Differenz in } \mathfrak{m}'^0_{\lambda\mu} \text{ enthalten ist,}$$

d. h. also $dV_1 - dV_2 = dF \in \mathfrak{m}'^0_{\lambda\mu}$. Die Definition überträgt sich auch selbsttätig auf Differentiale von $\mathfrak{M}'_{\lambda\mu}$ und den dort auftretenden Modul $\mathfrak{M}'^0_{\lambda\mu}$.

Im Sinne dieser *Kongruenzbeziehung* gilt nun

Satz 2. *Der Modul* $\mathfrak{m}'_m$ *ist endlich*, — sofern man kongruente Differentiale nicht als verschieden betrachtet.

Zum Beweis bilden wir

$$d(\tau^{\lambda+l} f^{\mu+m+1}) = n(\mu+m+1)\tau^{\lambda+l}(\tau^{n-1} - z) f^{\mu+m} d\tau + (\lambda+l)\tau^{\lambda+l-1} f^{\mu+m+1} d\tau$$

oder

$$\text{(7) II a.} \qquad n(\mu+m+1)dv_{\lambda+l+n-1}^{(\mu+m)} - n(\mu+m+1)\,z\,dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} + (\lambda+l)\,dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m+1)} = d(\tau^{\lambda+l} f^{\mu+m+1}).$$

Wendet man auf das letzte Glied links Formel I an (mit Ersetzung von l, m dort durch $l-1, m+1$), so folgt nach Zusammenfassung:

$$\text{(8) II.} \quad (\lambda+l+n(\mu+m+1))\, dv_{\lambda+l+n-1}^{(\mu+m)} - n(\lambda+l+\mu+m+1)\,z\,dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} + (n-1)(\lambda+l)\,dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)} = d(\tau^{\lambda+l} f^{\mu+m+1}).$$

Diese Beziehung ist eine lineare *Differenzengleichung* (bezw. zunächst *-kongruenz*) für die $dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}$.

Ist zunächst (*allgemeiner Fall*)

(9) $\lambda \neq 0$ und $\lambda + n\mu$ keine ganze Zahl, so ist für jeden Wert von l sowohl $\lambda + l$ als $\lambda + n\mu + l + n(m+1)$ von Null verschieden; indem man daher II nach $dv_{\lambda+l+n-1}^{(\mu+m)}$ oder nach $dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)}$ auflöst, erkennt man, daß sich die unteren Indizes schrittweise erniedrigen oder erhöhen lassen, und man gelangt so zu einer Darstellung aller Differentiale von $\mathfrak{m}'_m$ in der Form

$$\text{(10)} \qquad \sum_{l_0}^{l_0+n-1} g_l(z)\, dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} + dF.$$

l_0 ist dabei eine beliebige ganze Zahl, $g_l(z)$ aus $\mathsf{K}[z]$, dF aus $\mathfrak{m}'^0_{\lambda\mu}$. Für den allgemeinen Fall ist daher Satz 2 bewiesen, und zwar in der schärferen Fassung:

Satz 2*. *Im allgemeinen Fall besitzt der Modul* $\mathfrak{m}'_m$ *eine n-gliedrige Basis* [1]), *und zwar bilden irgend n „benachbarte" Differentiale* $dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}$ *eine solche*

$$(l = l_0,\ l_0+1, \ldots, l_0+n-1).$$

Ist dagegen (*Ausnahmefälle*)

A) $$\lambda \not\equiv 0, \quad \lambda + n\mu = g \text{ ganz},$$

so verschwindet für $l = -(g+n(m+1))$ in II der Faktor von $dv_{\lambda-g-nm-1}^{(\mu+m)}$. Dieses Differential kann daher mittels II nicht durch Differentiale mit kleinerem l ausgedrückt werden. $\lambda + l$ ist aber nach wie vor $\not\equiv 0$, und daher hat ein System von benachbarten Differentialen $dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}$, für das entweder $l \geqq -g-nm-1$ oder das wenigstens $dv_{\lambda-g-nm-1}^{(\mu+m)}$ enthält, die Basiseigenschaft. Ist ferner

B) $$\lambda = 0, \quad \lambda + n\mu \text{ } \textit{nicht ganz},$$

so werde, da für $l=0$ der Faktor von dv_{-1} verschwindet, während $\lambda+l+n(\mu+m+1)$ stets $\not\equiv 0$ bleibt, ein System benachbarter Differentiale so gewählt, daß entweder für diese $l \leqq -1$ oder doch $dv_{-1}^{(\mu+m)}$ in dem System auftritt. Im Falle

C) $$\lambda = 0, \ n\mu = g \text{ } \textit{ganz}$$

verschwindet $\lambda+l$ für $l=0$, und zugleich $\lambda+l+n(\mu+m+1)$ für $l=-(g+n(m+1))$. Es kann also mittels II.

$$\left\{\begin{array}{l} dv_{-1}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)} \text{ nicht durch höhere} \\ dv_{-g-nm-1}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)} \text{ nicht durch geringere} \end{array}\right\} \text{ Differentiale ausgedrückt werden.}$$

Solange nun $-g-n(m+1) \leqq 0$, kann man ein System von benachbarten Differentialen angeben, das sowohl eine der Bedingungen unter A) wie eine der Bedingungen unter B) erfüllt, daher auch jetzt eine Basis liefert. [Wegen $1 \leqq g \leqq n-1$ ist dies für $m \geqq -1$ der Fall.] Es ist nämlich entweder $-g-nm-1 < 0$, dann leistet z. B. eine $dv_{-1}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)}$ enthaltene Basis benachbarter Differentiale alles, oder (für $m=-1$) $0 \leqq -g-nm-1 \leqq n-2$, es kann also dann

$$dv_{-1}, dv_0, \ldots, dv_{n-3}, dv_{n-2} \text{ benutzt werden [2]}).$$

Für $m < -1$ jedoch lassen sich die in A) und B) gestellten Forderungen nicht mehr gleichzeitig erfüllen.

Wählt man jetzt n benachbarte Differentiale dv_l, unter denen dv_{-1} vorkommt, und nimmt hinzu noch $dv_{-g-nm-1}$, so lassen sich durch diese $n+1$ Elemente wieder alle Differentiale von $\mathfrak{m}'_m$ aufbauen. Satz 2 ist damit vollständig bewiesen.

Im *letzten Falle* kann man übrigens auch so vorgehen: Man hat

$$(11) \qquad dv_{-g-1}^{\left(\frac{g}{n}\right)} = f^{-m} dv_{-g-1}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)} = dv_{-mn-g-1}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)} + c_1 dv_{-mn-g-2}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)} + \cdots + (n-1)^{-m} dv_{-g-1}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)},$$

wie sich nach dem polynomischen Satz ergibt. ($c_1, \cdots$ aus $K[z]$).

$dv_{-mn-g-2}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)}, \ldots, dv_{-g-1}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)}$ sind durch die n erwähnten, dv_{-1} enthaltenden Diffe-

---

[1]) Über rationale Unabhängigkeit (im Sinn der Kongruenz mod. $m'^0_{\lambda\mu}$) soll mit dieser Bezeichnung nichts ausgesagt sein.

[2]) Wo kein Mißverständnis möglich ist, lassen wir gelegentlich obere Indizes fort.

rentiale darstellbar, $dv_{-g-nm-1}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)}$ daher durch diese und das von m unabhängige $dv_{-g-1}^{\left(\frac{g}{n}\right)}$. Will man weder die obige noch diese Hinzunahme ausführen, so kann man zunächst nur behaupten, daß alle dv_l für $l \leqq -1$ (oder auch, wenn man will, $\leqq n-2$) und die dv_l für $l \geqq -mn-g-1$ (oder auch, wenn man will, $\geqq -mn-g-n$) je einer Darstellung durch eine n-gliedrige Basis fähig sind. Für $0 \leqq l \leqq -mn-g-2$ sind offenbar schon je n Differentiale rational abhängig hinsichtlich $K[z]$ (im Sinne der Kongruenz); dies ergibt sich ohne weiteres aus der Darstellbarkeit durch $dv_{-1}, dv_0, \ldots, dv_{n-2}$, wobei dv_{-1} wegfällt, da sein Koeffizient in II verschwindet.

Wir wollen nun zeigen, daß sich, wenn man *an Stelle der Gleichheit die Kongruenz* treten läßt, *Satz* 1 *in gewissem Sinne umkehren läßt.* Zum Nachweis gehen wir aus von I a in der Form

$$\text{I a.} \quad (\lambda+l)\,dv_{\lambda-l-1}^{(\mu-m)} \equiv -n(\mu+m)\,dv_{\lambda+l+n-1}^{(\mu+m-1)} + n(\mu+m)\,z\,dv_{\lambda+l}^{(\mu+m-1)}$$

und verbinden hiermit

$$\text{I.} \qquad dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)} = dv_{\lambda+l+n-1}^{(\mu+m-1)} - n\,z\,dv_{\lambda+l}^{(\mu+m-1)} + (n-1)\,dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m-1)}.$$

Eliminiert man hieraus $dv_{\lambda+l+n-1}^{(\mu+m-1)}$ bzw. $dv_{\lambda+l}^{(\mu+m-1)}$, so ergeben sich die beiden „Sprungformeln"

$$(12)\ s_\lambda.\ (\lambda+l+n(\mu+m))\,dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)} \equiv -n(n-1)(\mu+m)(z\,dv_{\lambda+l}^{(\mu+m-1)} - dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m-1)})$$

und

$$(13)\ S_\lambda.\ (\lambda+l+\mu+m)\,dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)} \equiv -(n-1)(\mu+m)(dv_{\lambda+l+n-1}^{(\mu+m-1)} - dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m-1)}).$$

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$(14) \qquad \begin{aligned} A &= n(n-1)(\mu+m) \neq 0 \\ B_l &= \lambda+l+n(\mu+m) \\ C_l &= \lambda+l+\mu+m. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich aus s_λ, indem man l durch $l+j$ ersetzt und nach Multiplikation mit z^j über j summiert,

$$A\sum_0^{n-1}(z^{j+1}\,dv_{\lambda+l+j}^{(\mu+m-1)} - z^j\,dv_{\lambda+l+j-1}^{(\mu+m-1)}) \equiv -\sum_0^{n-1} B_{l+j}\,z^j\,dv_{\lambda+l+j-1}^{(\mu+m)} \qquad \text{oder}$$

$$(15) \quad A\,(z^n\,dv_{\lambda+l+n-1}^{(\mu+m-1)} - dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m-1)}) \equiv -\sum_0^{n-1} B_{l+j}\,z^j\,dv_{\lambda+l+j-1}^{(\mu+m)}.$$

Andrerseits ist nach S_λ

$$A\,(dv_{\lambda+l+n-1}^{(\mu+m-1)} - dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m-1)}) \equiv -nC_l\,dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)}, \qquad \text{woraus durch Subtraktion}$$

$$(16)\ \text{UI.} \quad A(z^n-1)\,dv_{\lambda+l+n-1}^{(\mu+m-1)} \equiv (n-1)\,(\lambda+l)\,dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)} - \sum_1^{n-1} B_{l+j}\,z^j\,dv_{\lambda+l+j-1}^{(\mu+m)}.$$

Das bedeutet, wie jetzt leicht ersichtlich, mit Benutzung von Satz 2

Satz 3. *Das Produkt aus* z^n-1 *und einem beliebigen Differential aus* $\mathfrak{m}'_{m-1}$ *ist kongruent einem Differential aus* $\mathfrak{m}'_m$.

Betrachtet man wieder kongruente Differentiale nicht als verschieden und bezeichnet man den durch Erweiterung von $K[z]$ zu $K\left[z, \frac{1}{z^n-1}\right]$ aus $\mathfrak{m}'_m$ hervorgehenden Modul mit $\overline{\mathfrak{m}}'_m$, so kann man auch kurz schreiben:

Satz 3*. $\mathfrak{m}'_{m-1} \notin \overline{\mathfrak{m}}'_m$.

Ohne weiteres folgt hieraus

$$\ldots \mathfrak{M}'_{m-1} \in \mathfrak{M}'_m \in \mathfrak{M}'_{m+1} \cdots$$

und daher zusammen mit Satz 1

(17) $$\cdots = \mathfrak{M}'_{m-1} = \mathfrak{M}'_m = \mathfrak{M}'_{m+1} = \cdots$$

§ 2. Ableitungsformeln und Differentialgleichung.

Wir führen jetzt *partielle Ableitungen* nach dem Parameter z ein, indem wir setzen

$$\frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} = \frac{\partial}{\partial z} (\tau^{\lambda+l} f^{\mu+m})\, d\tau .$$

Man hat

(18) III. $$\frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} = -(\mu+m)\, n\tau^{\lambda+l+1} f^{\mu+m-1}\, d\tau = -n(\mu+m)\, dv_{\lambda+l+1}^{(\mu+m-1)}$$

und entnimmt daraus

Satz 4. $$\frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} \equiv \mathfrak{m}'_{m-1},$$ *also jedenfalls* $$\equiv \mathfrak{m}'_{\lambda\mu}.$$

Nach Satz 3* jedoch kann im Sinne der Kongruenz sofort schärfer ausgesagt werden

$$\frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} \equiv \overline{\mathfrak{m}}'_m$$ oder weitergehend:

Satz 5. *Die Ableitung eines beliebigen Differentials von* $\mathfrak{m}'_m$ (*oder* $\mathfrak{M}'_m$) *gehört zu* $\overline{\mathfrak{m}}'_m$ (*oder* $\mathfrak{M}'_m$).

Ausführlich lautet die aus III und UI sich ergebende Formel:

(19) U'I. $$(n-1)(z^n-1)\frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l+n-2}^{(\mu+m)} \equiv -(n-1)(\lambda+l)\, dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)} + \sum_{1}^{n-1} B_{l+j} z^j\, dv_{\lambda+l+j-1}^{(\mu+m)}$$

Kombiniert man III mit den in § 1 erhaltenen Formeln II, s_λ, S_λ, so erhält man *gemischte Gleichungen* zwischen Ableitungen und Differentialen selbst.

So entsteht aus III und II

(20) II'. $$(\lambda+l)\, dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)} \equiv \frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l+n-2}^{(\mu+m)} - z\frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)};$$

aus III und s_λ

(21) s'_λ. $$B_l\, dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)} \equiv (n-1)\left[z\frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)} - \frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l-2}^{(\mu+m)}\right];$$

aus III und S_λ

(22) S'_λ. $$nC_l\, dv_{\lambda+l-1}^{(\mu+m)} \equiv (n-1)\left[\frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l+n-2}^{(\mu+m)} - \frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l-2}^{(\mu+m)}\right].$$

Die letzten drei Formeln sind übrigens voneinander linear abhängig, insofern für ihre linken und rechten Seiten identisch gilt (wegen (14) S. 75)

$$(n-1)\,\mathrm{II}' + s'_\lambda + S'_\lambda = 0 .$$

Aus II' und s'_λ ergibt sich nun eine sehr wichtige *Folgerung*, nämlich das Bestehen einer linearhomogenen *Kongruenzbeziehung zwischen* $dv_{\lambda+l}$ *und seinen n ersten Ableitungen nach* z, die später zur Differentialgleichung werden wird.

Wir schreiben (bei festem m und daher unterdrücktem oberem Index) II' in der Form:

II'. $$\frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l+n-2} \equiv z \frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l-1} + (\lambda + l)\, dv_{\lambda+l-1}\,.$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial z} dF(\tau, z) = d \frac{\partial F}{\partial z}(\tau, z)$, falls $F \subset \mathfrak{m}_{\lambda\mu}$, und wegen Satz 4 läßt sich die Kongruenz nach z differenzieren; tut man dies $(n-1)$-mal, so folgt

$$(23) \qquad \frac{\partial^n}{\partial z^n} dv_{\lambda+l+n-2} \equiv z \frac{\partial^n}{\partial z^n} dv_{\lambda+l-1} + (\lambda + l + n - 1) \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} dv_{\lambda+l-1}\,.$$

Ferner schreiben wir s'_λ mit Ersetzung von l durch $l + j$

$$s'_\lambda. \qquad (n-1) \frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l+j-2} \equiv (n-1) z \frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l+j-1} - B_{l+j}\, dv_{\lambda+l+j-1}$$

und finden durch $(n-k-1)$-maliges Differenzieren $(k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$

$$(24) \qquad (n-1) \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} dv_{\lambda+l+j-2} \equiv (n-1) z \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} dv_{\lambda+l+j-1} + ((n-1)(n-k-1) - B_{l+j}) \frac{\partial^{n-k-1}}{\partial z^{n-k-1}} dv_{\lambda+l+j-1}\,.$$

Wir nehmen zunächst $j = 1$ und setzen (24), für $k = 0, 1$ gebildet, in (23) ein. Man erhält

$$(n-1) \frac{\partial^n}{\partial z^n} dv_{\lambda+l+n-2} \equiv z\,[(n-1) z \frac{\partial^n}{\partial z^n} dv_{\lambda+l} + (n-1)((n-1) - B_{l+1}) \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} dv_{\lambda+l}]$$
$$+ (\lambda + l + n - 1)\,[(n-1) z \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} dv_{\lambda+l} + ((n-1)(n-2) - B_{l+1}) \frac{\partial^{n-2}}{\partial z^{n-2}} dv_{\lambda+l}]$$

oder

$$(25) \qquad (n-1) \frac{\partial^n}{\partial z^n} dv_{\lambda+l+n-2} \equiv P_{20}^{(n)} (\lambda + l) z^2 \frac{\partial^n}{\partial z^n} dv_{\lambda+l} + P_{21}^{(n)} (\lambda + l) z \frac{\partial^{n-2}}{\partial z^{n-1}} dv_{\lambda+l} + P_{22}^{(n)} (\lambda + l) \frac{\partial^{n-2}}{\partial z^{n-2}} dv_{\lambda+l}\,,$$

wenn man setzt

$$(26) \qquad P_{20}^{(n)} = (n-1),\ P_{21}^{(n)} = (n-1)(2n - 2 + \lambda + l) - B_{l+1},$$
$$P_{22}^{(n)} = (\lambda + l + n - 1)((n-1)(n-2) - B_{l+1});$$

sonach sind die $P_{2k}^{(n)}(\lambda + l)$ Polynome höchstens k-ten Grades in $\lambda + l$.

Für $n = 2$ hat man bereits eine Beziehung zwischen den Ableitungen von $dv_{\lambda+l}$. Allgemein findet man, wie wir durch vollständige Induktion sofort zeigen werden, für $j = 2, 3, \ldots, n-1, n$ eine Relation der Form

$$(27) \qquad (n-1)^{j-1} \frac{\partial^n dv_{\lambda+l+n-2}}{\partial z^n} \equiv \sum_0^j P_{jk}^{(n)} (\lambda + l) z^{j-k} \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} dv_{\lambda+l+j-2},$$

worin $P_{jk}^{(n)}(\lambda + l)$ ein Polynom höchstens k-ten Grades in $\lambda + l$ bedeutet.

Dies ist, wie eben gezeigt, richtig für $j = 2$. Allgemein gilt, wenn es für j richtig, nach (24)

$$(28) \qquad (n-1)^j \frac{\partial^n dv_{\lambda+l+n-2}}{\partial z^n} \equiv \sum_0^j P_{j,k}^{(n)} z^{j-k}\,[(n-1) z \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} dv_{\lambda+l+j-1} + ((n-1)(n-k-1) - B_{l+j}) \frac{\partial^{n-k-1}}{\partial z^{n-k-1}} dv_{\lambda+l+j-1}]$$
$$= \sum_0^{j+1} z^{j+1-k}\,[(n-1) P_{j,k}^{(n)} + ((n-1)(n-k) - B_{l+j}) P_{j,k-1}^{(n)}] \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} dv_{\lambda+l+k-1}\,,$$

wobei $P^{(n)}_{j,-1} = P^{(n)}_{j,j+1} = 0$ zu denken ist. Setzt man jetzt

$$P^{(n)}_{j+1,k} = (n-1)\,P^{(n)}_{j,k} + ((n-1)(n-k) - B_{l+j})\,P^{(n)}_{j,k-1} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, j+1, \tag{29}$$

so hat man in der Tat (27) durch vollständige Induktion gewonnen, wobei wegen (29) nach (14) auch die Gradeigenschaft richtig ist. ($P_{j+1,0} = (n-1)\,P_{j,0}$.) Durch Bildung von (27) für wachsende j wird aber der Index rechts dem links schrittweise genähert, und für $j = n$ ergibt sich schließlich

$$(n-1)^{n-1}(z^n - 1)\frac{\partial^n}{\partial z^n} dv_{\lambda+l+n-2} + \sum_1^n P^{(n)}_{n,k}\, z^{n-k}\,\frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}}\, dv_{\lambda+l+n-2} \equiv 0.$$

Ersetzt man noch $l+n-2$ durch l, so folgt schließlich

$$\text{IV.}\quad (n-1)^{n-1}(z^n-1)\frac{\partial^n}{\partial z^n} dv_{\lambda+l} + \sum_1^n A^{(n)}_{n,k}\, z^{n-k}\,\frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}}\, dv_{\lambda+l} \equiv 0. \tag{30}$$

Hierin sind die $A^{(n)}_{n,k}$ rekurrent bestimmt durch

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} A^{(n)}_{j+1,k} = (n-1)\,A^{(n)}_{j,k} + ((n-1)(n-k) - B_{l-n+j+2})\,A^{(n)}_{j,k-1} \\ (j = 2, 3, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots, j+1) \text{ mit den Anfangswerten} \\ A^{(n)}_{21} = (n-1)(\lambda + l + n) - B_{l-n+3}, \\ A^{(n)}_{22} = (\lambda + l + 1)((n-1)(n-2) - B_{l-n+3}) \text{ und} \\ A^{(n)}_{j,j+1} = 0;\ B_l = \lambda + l + n(\mu + m). \end{cases} \tag{31}$$

Man findet durch Auswertung der Rekursionsformel insbesondere

$$A^{(n)}_{n1} = (n-1)^{n-1}\, n\,(n - \tfrac{3}{2} - \mu - m), \text{ was wir später benutzen werden.} \tag{32}$$

Damit haben wir gewonnen

Satz 6. *Für $dv_{\lambda+l}$ gilt in Abhängigkeit von z die lineare homogene Differentialkongruenz IV n-ter Ordnung* [1]).

II. Abschnitt. Transzendenter Teil.

§ 1. Die Integrale und ihre analytische Fortsetzung.

Wir betrachten nunmehr *Integrale* $\int \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m} d\tau$, die wir zunächst bei festem m in Abhängigkeit von dem ganzzahligen Index l und der komplexen Veränderlichen z studieren wollen. Als Integrationsweg wählen wir in §§ 1, 2 lediglich *hinsichtlich $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$ geschlossene Kurven* der τ-Ebene. Darunter verstehen wir rektifizierbare, aber durchaus nicht notwendig doppelpunktfreie, in der schlichten τ-Ebene geschlossene Kurven, längs deren sich jede Funktion von $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$ fortsetzen läßt, und zwar derart, daß man nach Durchlaufung zum Ausgangswert zurückkehrt. Ist $dF(\tau, z) \subset \mathfrak{M}'^{0}_{\lambda\mu}$, d. h. das Differential einer Funktion von $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$, so gilt für jede solche Kurve C

$$\int_C dF = 0.$$

Daher verwandeln sich alle *Kongruenzbeziehungen* von § 1 beim Übergang zu den Integralen in *Gleichungen*.

Wir heben unter diesen Relationen, die sämtlich für $v_{\lambda+l} = \int_C dv_{\lambda+l}$ mit beliebigem ganzem l und jede hinsichtlich $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$ geschlossenen Kurve C gelten, vor allem hervor die (aus II hervorgehende)

---

[1]) Die Herleitung versagt auch für $\mu = 0$ nicht, somit ist durch die Rekursionsformeln IV KI S. 79/80 ergänzt.

Differenzengleichung

$$(1)\qquad \begin{aligned}\Delta_l(v;z) &= (\lambda+l+n(\mu+m+1))\,v_{\lambda+l+n-1}(z)\\ &\quad -n(\lambda+l+\mu+m+1)\,zv_{\lambda+l}(z)+(n-1)(\lambda+l)\,v_{\lambda+l-1}(z)=0\end{aligned}$$

und die **Differentialgleichung** (aus IV)

$$(2)\qquad D_z(v;l)=(n-1)^{n-1}(z^n-1)\frac{d^n v_{\lambda+l}(z)}{dz^n}+\sum_1^n{}^{k} A^{(n)}_{n,k}z^{n-k}\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}v_{\lambda+l}(z)=0.$$

Bei Gewinnung von (2) ist benutzt, daß für unsere Integrationswege die Beziehung gilt $\frac{\partial}{\partial z}\int_C = \int_C \frac{\partial}{\partial z}$.

$\Delta_l(v;z)=0$ hat die unabhängige Veränderliche l und den Parameter z.
$D_z(v;l)=0$ „ „ „ „ z „ „ „ l.
$D_z(v;l)=0$ ist vom Fuchsschen Typ und hat die n endlichen singulären Punkte $\varepsilon_h=e^{\frac{2\pi i h}{n}}$.

Läßt man C innerhalb der Gesamtheit aller hinsichtlich $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$ geschlossenen Kurven beliebig, so können sich dabei höchstens n linear unabhängige Integralwerte ergeben; denn $D_l(z)=0$ hat genau n linear unabhängige Lösungen und wird ja von allen Integralen $\int_C dv_{\lambda+l}$ befriedigt. Alle andern Integrale sind also von einer aus höchstens n Elementen bestehenden Minimalbasis linear abhängig. Wir stellen uns die Aufgabe, eine solche Basis für die Integrale durch passende Auswahl von Wegen herzustellen. Es zeigt sich, daß es im *allgemeinen Fall* [1]) genau n solche hinsichtlich $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$ geschlossene Wege gibt, so daß also hier die Gesamtheit der Integrale $\int_C dv_{\lambda+l}$ und ihrer Linearkombinationen mit der Gesamtheit der Lösungen der Differentialgleichung zusammenfällt [2]). In den Ausnahmefällen kann es anders sein; dieselben werden in § 3 behandelt.

Zur wirklichen *Aufstellung der Integrationswege* gehen wir auf die bei KI S. 69, Z. 4 v. o. gemachte Zweigeinteilung zurück. Es sei, mit leicht geänderter Bezeichnung, $\mathfrak{E}_h$ $(h=1,2,\ldots,n)$ das längs $\varepsilon_{h-1}\,\infty$ und $\varepsilon_h\,\infty$ radial aufgeschnittene Blatt über der z-Ebene. $\left\{\begin{matrix}\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_1\\ \varepsilon_0=\varepsilon_n\end{matrix}\right\}$. Sein Inneres ist dann das Bild des Sektors $\mathfrak{S}_h$:

$\frac{n-(h-1)}{n}2\pi > \operatorname{arc} t_h > \frac{n-h}{n}2\pi$; an Randpunkten rechnen wir diesem die Punkte

$$\begin{aligned} t_h &= \varrho\,\varepsilon_{n-(h-1)} && 0<\varrho<1,\\ t_h &= \varrho\,\varepsilon_{n-h} && 1<\varrho<\infty,\end{aligned}$$

wodurch auch über die Zugehörigkeit der (nichtverzweigten) Randpunkte zu den einzelnen Blättern $\mathfrak{E}_h$ entschieden sei (s. Fig. 1). t_{h+1}, t_h verzweigen sich bei $z=\varepsilon_h$ [3]) $[t_{n+1}=t_1]$.

---

[1]) Abschnitt I S. 73.

[2]) *Nekrassoff* 9. zeigt wohl, daß sich alle bestimmten Integrale über Kurven C linear aus n speziellen zusammensetzen, aber nicht, daß die Differentialgleichung keine von diesen linear unabhängigen Lösungen besitzt; beides ist gezeigt, wenn die lineare Unabhängigkeit von n speziellen unter den Kurvenintegralen erwiesen ist, wie wir es für unseren Fall im folgenden tun werden.

[3]) Wir erreichen durch die Bezeichnungsänderung, daß in der positiv reellen t-Achse die Bereiche $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_n$ aneinanderstoßen.

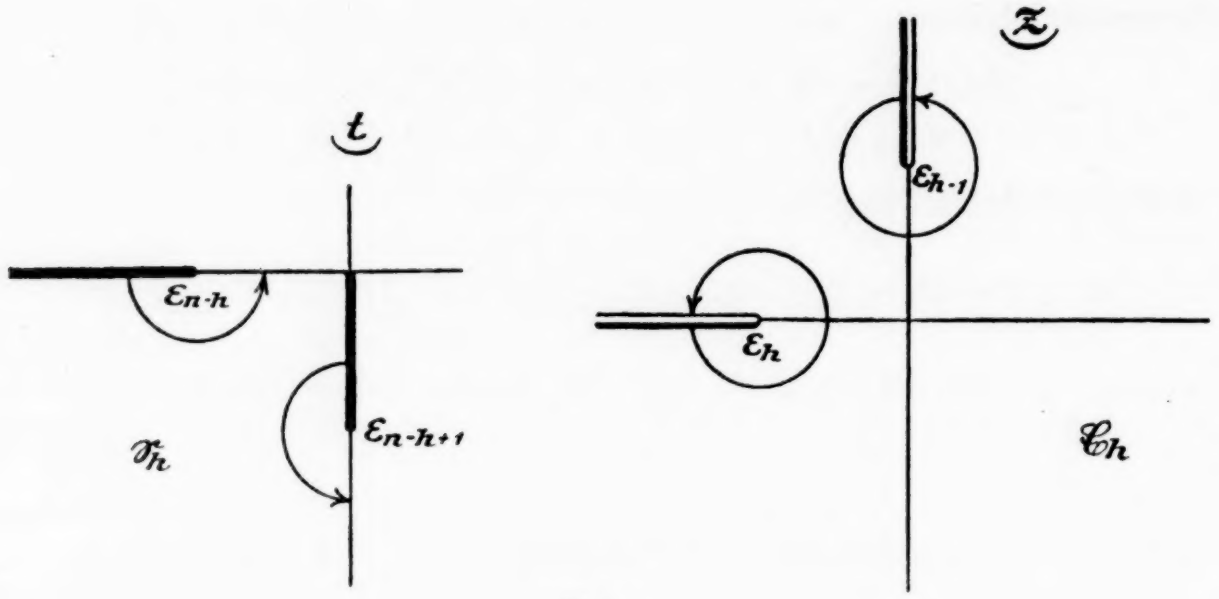

Fig. 1.

Es sei jetzt R beliebig groß und jedenfalls > 1 angenommen, und dann $\delta > 0$ so bestimmt, daß $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{\delta} \geqq R$. Dann ist in $|z| < R$ für jeden Zweig t_h

$$(3) \qquad \left|\frac{n-1}{t_h}\right| < \left|\frac{t_h^n + n - 1}{t_h}\right| = |nz| < \frac{n-1}{\delta}, \text{ also } |t_h| > \delta.$$

Mit $\overline{\mathfrak{E}}$ bezeichnen wir das Teilgebiet von $\mathfrak{E}$ (s. S. 72), für das zugleich $|z| < R$. Ferner sei τ_0 ein Punkt von $\mathfrak{F}_z$ mit

$$(4) \qquad 0 < |\tau_0| < \delta,$$

und über den Wert $\tau_0^{\lambda} f^{\mu}(\tau_0, z)$ beliebig ein für allemal verfügt. $f(\tau_0, z)$ ist als Funktion von z nicht nur in $\overline{\mathfrak{E}}$, sondern für $|z| < R$ regulär eindeutig. Mit $(\tau_0 t_h^+ \tau_0)$ oder (t_h^+) [1]) bezeichnen wir eine a) einfache, von τ_0 auslaufende und dorthin zurückkehrende, t_h und nur diesen von den Verzweigungspunkten einmal im positiven Sinne umschlingende Kurve, die keinen von ihnen trifft und b) überdies von den Schnitten nur den von t_h ausgehenden überschreitet. Das Integral

$$(5) \qquad \int_{(t_h^+)} dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}$$

ist dann von der speziellen Wahl des diesen Bedingungen genügenden Integrationsweges unabhängig und in $\overline{\mathfrak{E}}$ regulär. Entsprechend führen wir ein, dabei stets vom nämlichen Anfangswert ausgehend [2]),

$$(6) \qquad \int_{(t_h^-)} = -\mathsf{M}^{-1} \int_{(t_h^+)}, \quad \int_{(0^-)} = -\Lambda^{-1} \int_{(0^+)}, \quad \int_{(\infty^-)} = -\Lambda \mathsf{M}^n \int_{(\infty^+)}.$$

Im letzten Falle werden alle Schnitte der Reihe nach je einmal überschritten und zwar werde verabredet: für $\int_{(\infty^+)}$ die reelle positive Achse zuerst. Es gilt dann die später zu benützende Beziehung

$$(7) \qquad \int_{(0^+)} + \Lambda \int_{(\infty^+)} = -\sum_1^n \mathsf{M}^{-h} \int_{(t_h^+)}.$$

---

[1]) Das Zeichen + für den Umlaufssinn soll nicht weggelassen werden, um Verwechslungen mit Integrationsgrenzen zu vermeiden.

[2]) Mit *Nekrassoff* 9., abweichend von *Pochhammer* 17.

Aus den soeben definierten einfachen Schleifenwegen bilden wir jetzt Jordan-Pochhammersche *Doppelschleifen* $(u^+\, v^+\, u^-\, v^-)$, wo u, v irgend zwei der Punkte $0, \infty, t_h$ sein sollen. Jeder Doppelschleifenweg ist dann hinsichtlich $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$ geschlossen. Man hat bekanntlich [1])

$$\int_{(u^+ v^+ u^- v^-)} = (1 - e^{2\pi i \lambda_v}) \int_{(u^+)} - (1 - e^{2\pi i \lambda_\mu}) \int_{(v^+)}, \tag{8}$$

unter λ_u, λ_v die zu u, v bzw. gehörigen Umlaufsexponenten verstanden.

Die so entstehenden $\binom{n+2}{2}$ Integrale sind in $\overline{\mathfrak{E}}$ reguläre Funktionen von z und erfüllen die Differentialgleichung. Folglich können diese Funktionen höchstens ε_h, ∞ zu singulären Punkten haben, nicht etwa das Bild $z_0 = \frac{1}{n}\left(\tau_0^{n-1} + \frac{n-1}{\tau_0}\right)$ des Anfangspunkts der Integration, das wegen $|\tau_0| < \delta$ außerhalb $\overline{\mathfrak{E}}$ liegt (und für das in der Tat eine der Schleifen $(\tau_0\, t_h^+\, \tau_0)$ nicht definiert ist, da τ_0 mit einem der Punkte $t_h(z_0)$ zusammenfällt) und auch keinen inneren Punkt der Schnitte. Übrigens sind die Integrale von der Wahl von τ_0 unabhängig, sofern nur der Anfangswert $\tau_0^\lambda f^\mu(\tau_0, z)$ mit τ_0 in $\mathfrak{T}$ analytisch fortgesetzt wird. — Speziell greifen wir heraus (die Indizes $\lambda + l$, $\mu + m$ festhaltend und zunächst links unterdrückend)

$$V_h = \int_{(t_h^+ 0^+ t_h^- 0^-)} dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} = (1 - \Lambda) \int_{(t_h^+)} - (1 - \mathsf{M}) \int_{(0^+)} \qquad h = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

(Wir gehen nicht näher auf die leicht ersichtlichen Vereinfachungen ein, die ein solcher Ausdruck bei speziellen Annahmen über die Exponenten (z. B. $\lambda = \mu$, $\lambda + \mu = 1$, $\Re(\lambda + l) > 0$ u. ä.) gestattet und kommen hierauf nur in den Fällen zurück, wo sich ein derartige Reduktion, verbunden mit Grenzübergang, als nötig erweist, um die Ausnahmefälle zu erfassen, ferner im Legendreschen Fall beim Übergang zu den üblichen Wegformen.)

Das nächste Ziel ist die *analytische Fortsetzung* der in $\overline{\mathfrak{E}}$ (und damit nach obigem in $\mathfrak{E}$) regulären Funktionen $V_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ über die Schnitte. Es wird sich dann aus dem Ergebnis hinterher (§ 2) die lineare Unabhängigkeit der V_j für den allgemeinen Fall ergeben. Es genügt, das Verhalten bei Umläufen um die ε_h festzustellen. Dazu dient die Methode der *veränderlichen Integrationswege* [2]): Wir haben das Verhalten der $t_j(z)$ in der τ-Ebene zu prüfen und (anschaulich gesprochen) die Schleifen (0^+), (t_j^+) bei festem τ_0 in Abhängigkeit von z so stetig zu verwandeln, daß für jedes z auf dem Fortsetzungsweg die Eigenschaften a) (S. 80) erhalten bleiben; dabei wird b) ev. verloren gehen; aber es läßt sich, wie wir finden werden, der Endweg wieder aus Schleifen zusammensetzen, die a) und b) erfüllen. Ferner ist zu beachten, daß bei den Umläufen $f(\tau_0, z)$ eindeutig bleibt.

Es sei zunächst $z = \varepsilon_h (1 + \sigma)$, wobei wir über $\sigma > 0$ noch verfügen wollen. z hat dann, den beiden über z gelegenen, zu $\mathfrak{E}_h$ bzw. $\mathfrak{E}_{h+1}$ gehörigen Punkten nach S. 79 entsprechend, zwei Bilder t_h, t_{h+1}, die auf dem Strahl $t = \varrho \varepsilon_{n-h}$ den Punkt $\varrho = 1$ zwischen sich haben, und zwar ist $|t_{h+1}| < |t_h|$. Beim Umlauf von z im positiven Sinne auf einem Kreis vom Radius ϱ um ε_h vertauschen sich t_h, t_{h+1}, indem sie zwei Bögen beschreiben, die sich zu einer kleinen, geschlossenen, ε_{n-h} einschließenden, τ_0 aber, sobald

---

[1]) *Nekrassoff* 9., S. 518.

[2]) In dieser Allgemeinheit siehe vor allem *Nekrassoff* 9.; vgl. Fußnote [3]) S. 70 unserer Einleitung.

nur σ hinreichend klein ist, wegen (3), (4) im Äußern lassenden Kurve ergänzen. Der gewählten Aufschneidung der τ-Ebene entsprechend sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $h \neq n$. Wie Fig. 2 veranschaulicht, verwandeln sich die Wege folgendermaßen (durch Pfeile angedeutet):

$$(t_h^+) \to (t_{h+1}^+), \quad (t_{h+1}^+) \to (t_{h+1}^+ t_h^+ t_{h+1}^-),$$

so daß für die einfachen Schleifenintegrale kommt

$$(10) \quad \int\limits_{(t_h^+)} \to \int\limits_{(t_{h+1}^+)}, \qquad \int\limits_{(t_{h+1}^+)} \to \int\limits_{(t_{h+1}^+)} + \mathsf{M} \int\limits_{(t_h^+)} + \mathsf{M}^2 \int\limits_{(t_{h+1}^-)} = (1-\mathsf{M}) \int\limits_{(t_{h+1}^+)} + \mathsf{M} \int\limits_{(t_h^+)}$$

nach (6) S. 80.

Setzt man dies in die Ausdrücke (9) für die V_h ein, so sieht man, wenn mit $\Theta_h V_j$ die Fortsetzung von V_j nach dem Umlauf um ε_h bezeichnet wird, daß

$$(11)_a \quad \begin{cases} \Theta_h V_h = V_{h+1} \\ \Theta_h V_{h+1} = (1-\Lambda)\Big((1-\mathsf{M}) \displaystyle\int\limits_{(t_{h+1}^+)} + \mathsf{M} \int\limits_{(t_h^+)}\Big) - (1-\mathsf{M}) \int\limits_{(0^+)} \\ \text{oder zusammengefaßt} \\ \Theta_h V_{h+1} = \mathsf{M} V_h + (1-\mathsf{M}) V_{h+1}. \end{cases}$$

Die weiteren Bilder $t_j (j \neq h, h+1)$ gehen beim Umlauf, ohne sich gegenseitig zu umkreisen, in sich über, so daß man hat

$$(11)_b \qquad \Theta_h V_j = V_j \quad \text{für} \quad j \neq h, h+1.$$

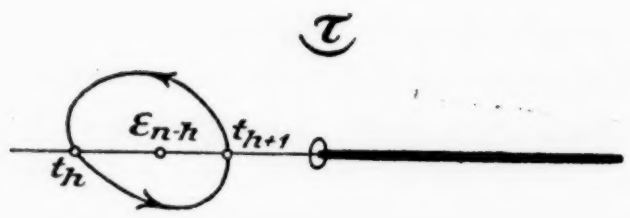

Fig. 2.

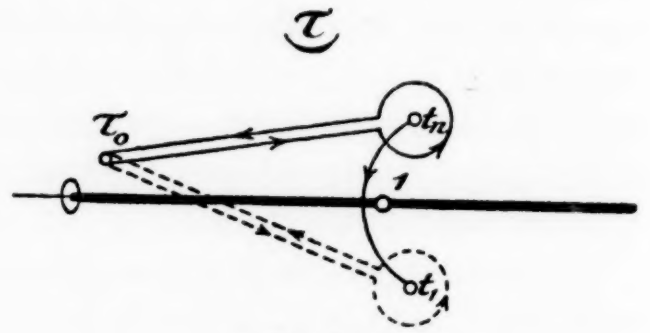

Fig. 3 a.

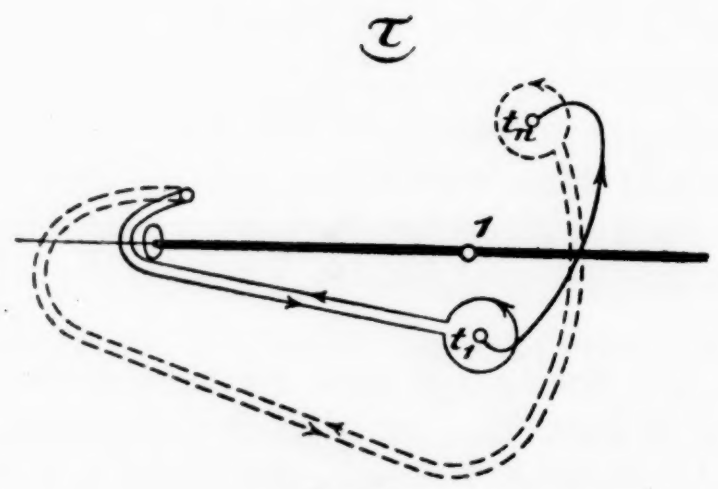

Fig. 3 b.

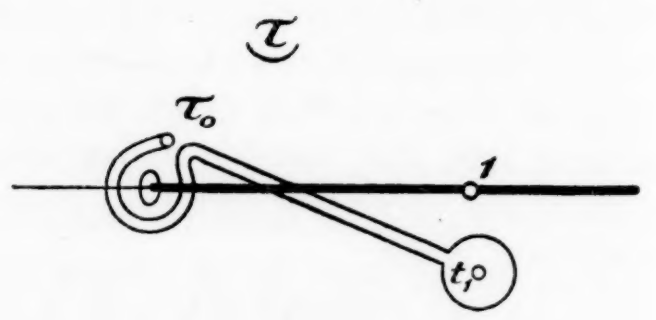

Fig. 3 c.

2. Anders im Falle $h = n$ (s. Fig. 3). Man sieht leicht, daß unter der Annahme $\Im(\tau_0) > 0$ übergeht

$$(t_n^+) \to {}^*(t_1^+), \quad (t_1^+) \to (0^+ {}^* t_1^+ t_n^+ {}^* t_1^- 0^-).$$

Hierbei ist unter $*(t_1^{\pm})$ der Weg verstanden, der bei Beibehaltung der übrigen Festsetzungen an Stelle von $(t_1^{\pm})$ hervorgeht, wenn der Schritt $0\,\infty$ längs der positiven Achse getilgt und durch einen solchen längs der negativen ersetzt wird.

Wir haben daher jetzt noch $*(t_1^{\pm})$ durch $(t_1^{\pm})$ auszudrücken. Es ist nach Fig. 3 c

(12) $$\int_{(t_1^+)} = \int_{(0^+)} + \Lambda \int_{*(t_1^+)} + \Lambda M \int_{(0^-)}, \quad \text{also nach (6) S. 80}$$

$$\int_{*(t_1^+)} = \Lambda^{-1}\Big(\int_{(t_1^+)} - (1-M)\int_{(0^+)}\Big); \quad \text{durch Einsetzen ergibt sich}$$

$$\Theta_n V_n = (1-\Lambda)\Lambda^{-1}\Big(\int_{(t_1^+)} - (1-M)\int_{(0^+)}\Big) - (1-M)\int_{(0^+)} = \Lambda^{-1}\Big((1-\Lambda)\int_{(t_1^+)} - (1-M)\int_{0^+}\Big),$$

also

(13) $$\Theta_n V_n = \Lambda^{-1} V_1; \quad \text{ferner}$$

$$\Theta_n V_1 = (1-\Lambda)\Big[(1-M)\int_{(0^+)} + \Lambda(1-M)\int_{*(t_1^+)} + \Lambda M \int_{(t_n^+)}\Big] - (1-M\int_{(0^+)}$$

$$= (1-\Lambda)\Big((1-M)\int_{(t_1^+)} + \Lambda M \int_{(t_n^+)}\Big) - (1-M)(1-M+\Lambda M)\int_{(0^+)},$$

also

$(13)_a$ $\Theta_n V_1 = (1-M)V_1 + \Lambda M V_n$. Endlich ist wieder

$(13)_b$ $\Theta_n V_j = V_j$ für $j \neq n, 1$.

Die analytischen Fortsetzungen der V_j drücken sich also (wie es sein muß, wenn die V_j ein F. S. bilden sollen) linear homogen, und zwar mit nur von λ, μ, nicht von l, m abhängigen Koeffizienten, durch die V_j aus. Wir formulieren das in

Satz 7. *Die analytische Fortsetzung des Systems (V_j) um ε_h ist gegeben durch die Matrizengleichung $(\Theta_h V_j) = A_h \cdot (V_j)$. Die Umlaufsmatrix A_h ist nur in dem Teilquadrat mit den Spalten- und Zeilennummern $h, h+1$ (bzw. $1, n$ für $h = n$) von der Einheitsmatrix E verschieden, und die aus diesen vier Elementen bestehende Teilmatrix lautet*

$$\text{für } h \neq n \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ M & 1-M \end{pmatrix}, \quad \text{für } h = n \quad \begin{pmatrix} 1-M & \Lambda M \\ \Lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Die Probleme der linearen Unabhängigkeit und die Riemannsche Klasse im allgemeinen Fall.

Wir beweisen jetzt mit Hilfe von Satz 7

Satz 8. *Im allgemeinen Fall ($\lambda \neq 0$, $\lambda + n\mu$ nicht ganz) sind die V_j linear unabhängig.*

Angenommen, es wäre im Gegenteil

(14) $$\sum_1^n C_j V_j = 0 \quad \text{mit} \quad \sum_1^n |C_j| > 0,$$

so ergäbe sich durch Fortsetzung um ε_h für $h = 1, 2, \ldots, n-1$

(15) $$\sum_{j \neq h, h+1} C_j V_j + C_h V_{h+1} + C_{h+1}(M V_h + (1-M) V_{h+1}) = 0 \quad \text{und für } h = n$$

(16) $$\sum_2^{n-1} C_j V_j + C_1((1-M)V_1 + \Lambda M V_n) + C_n \Lambda^{-1} V_1 = 0.$$

Bildet man die Differenzen (14)—(15) und (14)—(16), so folgt

$$(17) \qquad (C_h - \mathsf{M}C_{h+1})\,(V_h - V_{h+1}) = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n-1) \text{ und}$$

$$(18) \qquad (\Lambda^{-1}C_n - \mathsf{M}C_1)\,(\Lambda V_n - V_1) = 0\,.$$

Wir werden sogleich zeigen, daß die zweiten Klammern sämtlich *nicht* identisch verschwinden. Dies für den Augenblick vorausgesetzt, folgt aus (17), daß alle $C_j \neq 0$, da mindestens eines nicht verschwindet, sowie

$$(19) \qquad C_j = \mathsf{M}^{n-j}C_n \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1)\,.$$

Die einzige in Frage kommende Relation ist also

$$(20) \qquad \sum_1^n \mathsf{M}^{n-j}V_j = 0;$$

dabei muß aber nach (18), (19) gelten

(21) $1 - \Lambda\mathsf{M}^n = 0$ oder $\lambda + n\mu$ ganz, gegen die Annahme.

Um den zurückgestellten Nachweis zu erbringen, nehmen wir zunächst an

Fall a) $2(\mu + m + 1)$ *keine* ganze negative Zahl.

Es ist $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$

$$(22) \qquad V_{h+1} - V_h = (1-\Lambda)\Big(\int_{(t_{h+1}^+\ t_h^+)} - \int\Big) = \frac{1-\Lambda}{1-\mathsf{M}} \int_{(t_{h+1}^+ t_h^+ t_h^- t_{h+1}^-)} \tau^{\lambda+l}((\tau-t_1)\cdots(\tau-t_h))^{\mu+m}\,dt.$$

Wir setzen

$$\tau - t_h = u(t_{h+1} - t_h), \text{ sodaß}$$
$$\tau - t_{h+1} = (u-1)\,(t_{h+1} - t_h) \text{ und allgemein}$$
$$\tau - t_j = t_h - t_j + u\,(t_{h+1} - t_h)\,.$$

Aus (22) wird dann

$$(23) \qquad V_{h+1} - V_h = \frac{1-\Lambda}{1-\mathsf{M}}\, t_h^{\lambda+l}(t_{h+1}-t_h)^{2\mu+2m+1} \prod_{j\neq h,\,h+1} (t_h - t_j)^{\mu+m}$$
$$\times \int_{(1^+0^+1^-0^-)} \Big(1 + u\,\frac{t_{h+1}-t_h}{t_h}\Big)^{\lambda+l} \prod_{j\neq h,\,h+1} \Big(1 + u\,\frac{t_{h+1}-t_h}{t_h - t_j}\Big)^{\mu+m} \cdot (u\,(u-1))^{\mu+m}\,du.$$

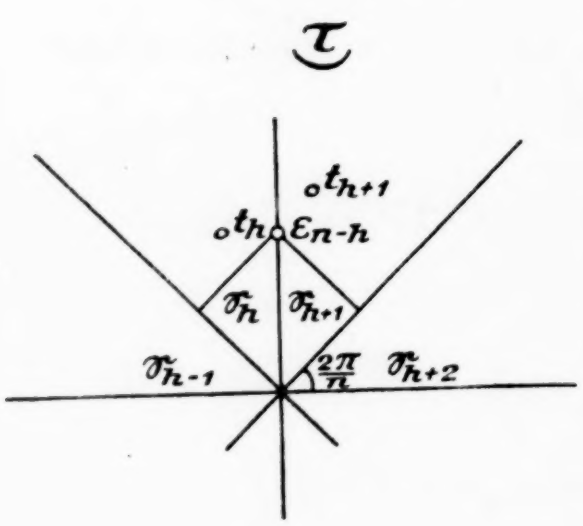

Fig. 4.

Verschwände nun die linke Seite identisch, so wegen $\Lambda \neq 1$ auch das Integral rechts. Wir dürfen hier die Werte der multiplikativen Funktionen so angenommen denken, daß die beiden Klammerpotenzen im Integral für $u = 0$ zu eins werden. Läßt man jetzt, bei unverändertem Integrationsweg in der u-Ebene, $z \to \varepsilon_h$ rücken, so konvergieren sie gleichmäßig gegen eins. Denn man hat, sobald $|z - \varepsilon_h| < \omega_\eta$ (mit η bel. > 0)

$$|t_h| > 1 - \eta, \quad |t_h - t_j| > \frac{1}{2}\,|\varepsilon_{n-h} - t_j| \geqq \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

(da t_j in $\mathfrak{S}_j$; $j \neq h,\ h+1$; s. Figur 4) und $|t_{h+1} - t_h| < \eta$.

Der Grenzwert des Integrals ist daher bis auf einen Faktor $\mathsf{M}^{s+\frac{1}{2}}$ wo s eine belanglose ganze Zahl,

$$(24)\qquad \int_{(1^+0^+1^-0^-)} u^{\mu+m}(1-u)^{\mu+m}\,du = (1-\mathsf{M})^2\,\mathsf{B}(\mu+m+1,\ \mu+m+1)$$
$$= \frac{(1-\mathsf{M})^2\,\Gamma^2(\mu+m+1)}{\Gamma(2\mu+2m+2)}.$$

Dieser Ausdruck ist aber für die in Frage kommenden μ, m von Null verschieden, da die Γ-Funktion keine Nullstellen und nur 0 und die negativen ganzen Zahlen zu Polen hat, während $2\mu+2m+2$ wegen $\mu \neq 0;\ 0 \leqq \Re(\mu) < 1$ nicht Null und wegen der Bedingung a) nicht negativ ganz ist. Das Integral in (23) ist also nicht identisch Null, da es für $z = \varepsilon_h$ den Grenzwert (24) hat. Also kann auch (23) nicht identisch verschwinden.

Wir haben noch zu prüfen

$$(23')\qquad V_1 - \Lambda V_n = (1-\Lambda)\int_{(t_1^+)} - \Lambda(1-\Lambda)\int_{(t_n^+)} - (1-\Lambda)(1-\mathsf{M})\int_{(0^+)}$$
$$= \Lambda(1-\Lambda)\Big(\int_{*(t_1^+)} - \int_{(t_n^+)}\Big)$$

nach (12) S. 83. Die Differenz rechts kann aber wie soeben behandelt werden, und damit ist im Falle a) Satz 8 bewiesen.

Dagegen versagt der Beweis im

Fall b) $2(\mu+m+1) =$ *negativ ganz.* Es ist dann stets $\mu = \frac{1}{2}$, wir setzen

$$2(\mu+m+1) = 2m+3 = -2p+1.$$
$$B\Big(-p+\frac{1}{2},\ -p+\frac{1}{2}\Big)$$

verschwindet für $p = 1, 2, \ldots$!

Nun ist nach III., Abschn. I, S. 76, wenn wir die Indizes wieder ausschreiben

$$V_{h,\lambda+l}^{(-p-\frac{1}{2})} = \frac{2^p}{n^p\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}\cdot\frac{d^p}{dz^p}\,V_{h,\lambda+l-p}^{(-\frac{1}{2})}.$$ Wäre also

$V_{h+1,\lambda+l}^{(-p-\frac{1}{2})} - V_{h,\lambda+l}^{(-p-\frac{1}{2})}$ identisch Null, so wäre offenbar

$V_{h+1,\lambda+l-p}^{(-\frac{1}{2})} - V_{h,\lambda+l-p}^{(-\frac{1}{2})} = g(z)$ ein Polynom in z. Durch analytische Fortsetzung der linken Seite um ε_{h+1} aber, nach Satz 7, folgte für $h \neq n-1,\ n$

$$V_{h+2,\lambda+l-p}^{(-\frac{1}{2})} - V_{h,\lambda+l-p}^{(-\frac{1}{2})} = g(z),\quad \text{also}$$
$$V_{h+1,\lambda+l-p}^{(-\frac{1}{2})} - V_{h+2,\lambda+l+p}^{(-\frac{1}{2})} = 0.$$ Das ist aber nach dem unter

a) gezeigten nicht möglich, da jetzt mit $\mu = \frac{1}{2}$, $m = -1$ $2(\mu+m+1) = 1$ nicht negativ ist. Ebenso folgte für $h = n-1$ durch Fortsetzung um ε_n die unmögliche Identität $V_{1,\lambda+l-p}^{(-\frac{1}{2})} - \Lambda\, V_{n,\lambda+l-p}^{(-\frac{1}{2})} = 0$ und entsprechend aus der Annahme

$$V_{1,\lambda+l}^{(-p-\frac{1}{2})} - \Lambda\, V_{n,\lambda+l}^{(-p-\frac{1}{2})} = 0$$
$$V_{1,\lambda+l-p}^{(-\frac{1}{2})} - V_{2,\lambda+l-p}^{(-\frac{1}{2})} = 0.$$

Es kann also auch jetzt keine der zweiten Klammern in (17), (18) verschwinden, und damit ist der Beweis von Satz 8 zu Ende geführt.

Aus Satz 8 folgt weiter durch die nämliche Schlußweise

Satz 8a. *Die Differentialgleichung hat im allgemeinen Fall keine (nichtverschwindende) eindeutige Lösung.*

Denn eine solche — die natürlich nur eine rationale Funktion sein könnte, da $D_z = 0$ vom Fuchsschen Typ — wäre in der Form

$$(14') \qquad V = \sum_1^n C_j V_j$$

darstellbar (nach Satz 8) und das würde, da wir nur die *Differenzen* (14) — (15), (14) — (16) zum Beweis benutzt hatten, auf die nämliche Weise zum Widerspruch führen. Die einzige, bei Erfüllung von (19) ohne (18) in Frage kommende Funktion wäre $V = \sum_1^n M^{n-j} V_j$, die aber, da (21) nicht erfüllt ist, nicht eindeutig bleibt.

Wohl aber gibt es *Lösungen*, die an *einer einzelnen Stelle* ε_h eindeutig bleiben, und sogar *regulär* sind. Zunächst wissen wir, daß in $z = \varepsilon_h$ alle V_j $(j \neq h,\ h+1)$ eindeutig sind, ebenso für $h \neq n$ noch $(V_h) = \mathsf{M} V_h + V_{h+1}$ und für $h = n$ $(V_n) = V_1 + \Lambda \mathsf{M} V_n$, wie aus den Formeln (13) leicht ersichtlich. Daß sie aber *regulär* sind, kann mit Hinzuziehung der Differentialgleichung so erkannt werden: Nach (30) und (32) Abschn. I, S. 78 lautet sie für die Stelle ε_h offenbar so

$$(25) \quad (z-\varepsilon_h)\frac{d^n v}{dz^n} + \left(n - \frac{3}{2} - \mu - m\right)(1 + (z-\varepsilon_h)\,\mathfrak{P}_1(z-\varepsilon_h))\frac{d^{n-1} v}{dz^{n-1}} + \sum_2^n \mathfrak{P}_j(z-\varepsilon_h)\frac{d^{n-j} v}{dz^{n-j}} = 0 \quad (\mathfrak{P}_j \text{ Potenzreihen}).$$

Nach einem bekannten Satze [1]) gibt es sonach $n-1$ linear unabhängige, in ε_h reguläre Lösungen. Eine n-te, von diesen unabhängige Lösung kann dort nicht eindeutig sein, sonst wären es alle Lösungen, und das widerspräche Satz 7, wonach V_h in V_{h+1} [2]) übergeht, das nach Satz 8 davon verschieden ist. Jede eindeutige Lösung ist daher von gewissen $n-1$ regulären linear abhängig, also sind die, wie eben festgestellt, in ε_h eindeutigen

$$(26) \qquad \begin{array}{l} V_1, \ldots, V_{h-1}, (V_h), V_{h+2}, \ldots, V_n \quad \text{bzw.} \\ V_2, \ldots \qquad\qquad\qquad\quad , V_{n-1}, (V_n) \end{array}$$

in ε_h regulär; und da sie linear unabhängig sind, bilden sie selbst eine Basis des Systems der in ε_h regulären Lösungen.

Für $\mu \neq \frac{1}{2}$ entnimmt man dies auch ohne weiteres aus der *determinierenden Gleichung*

$$(27) \qquad r(r-1)\cdots(r-n+2)(r-\mu-m-\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Jede in ε_h eindeutige Lösung muß ja dann zu einem der Exponenten $0, 1, \ldots, n-2$ gehören, also regulär sein.

Als letzte, *nicht eindeutige Lösung* kann für $\mu \neq \frac{1}{2}$ gewählt werden

$$(28) \qquad \begin{array}{rl} ((V_{h+1})) = V_h - V_{h+1} & \text{für } h \neq n \text{ mit} \\ \Theta_h((V_{h+1})) = -\mathsf{M}((V_{h+1})) & \text{bzw. für } h = n \\ ((V_1)) = V_1 - \Lambda V_n & \text{mit} \\ \Theta_n((V_1)) = -\mathsf{M}((V_1)). & \end{array}$$

Der zugehörige Exponent ist nach (27) $\mu + \frac{1}{2} + m$, für $m < -1$ also mit negativem Realteil. (Man vergleiche hierzu Satz 3; der Nenner $z^n - 1$ kann also bei Reduktion von $\mathfrak{M}'_{m-1}$ auf $\mathfrak{M}'_m$ nicht entbehrt werden!) Im Falle $\mu = \frac{1}{2}$ ist eine multiplikative Lösung nicht vorhanden; die Teilmatrix der Umlaufsmatrix an der Stelle $z = \varepsilon_h$ für

---

[1]) Siehe z. B. *Heffter*, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig 1894, S. 17, 33, 1. Beisp., allgemeiner *Perron* 12., S. 21. Vgl. auch *Hilb*, Enz. d. M. W. II B 5, S. 483/484.

[2]) V_n in $\Lambda^{-1} V_1$.

$(V_h) = -V_h + V_{h+1}$ und
V_{h+1}
hat nach den Formeln (11) schon die normierte Form
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[h \neq n]$, ebenso die Teilmatrix für
$(V_n) = V_1 - \Lambda V_n$ und
V_1.

Es ist daher $V_{h+1} = \mathfrak{P}(z - \varepsilon_h) + \dfrac{\lg(z - \varepsilon_h)}{2\pi i}(V_h) \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$.

Wir formulieren

Satz 9. *An jeder Stelle ε_h sind die $n - 1$ linear unabhängigen dort regulären Lösungen der Differentialgleichung angebbar; eine letzte ist für $\mu \neq \frac{1}{2}$ multiplikativ mit dem Faktor $-\mathsf{M}$, und nur für $\mu = \frac{1}{2}$ logarithmisch. Die normierten Teilmatrizen sind*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathsf{M} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann stets eine Lösungsschar vom Rang $n - s$ angeben, die an s der n singulären Punkte regulär ist, wie sich aus der Form (2) S. 79 der Differentialgleichung ohne weiteres entnehmen läßt [1]). Wir geben hier noch, späterer Anwendung halber, die nur bei $z = 1$ singuläre Lösung an; indem wir die willkürliche Konstante passend normieren, wird sie

$$(29) \quad P = -\Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}\sum_1^n \mathsf{M}^{n-j}V_j = (1 - \Lambda)\int_{(\infty^+)} - (1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n})\int_{(0^+)} = \int_{(\infty^+ 0^+ \infty^- 0^-)}$$

nach (7) S. 80.

Das Verhalten beim Umlauf um $z = 1$ ist durch

$$(30) \qquad \Theta_n P = P + \Lambda^{-1}(1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n})(\Lambda V_n - V_1)$$

gegeben. P verschwindet wegen (23′) nicht.

Wir stellen nunmehr den *Anschluß an Abschn. I* wieder her. Alle Funktionssysteme $\sum_1^n R_k(z)\dfrac{d^{k-1}V_j}{dz^{k-1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ R_k(z)\,(\mathsf{K}(z))$ haben an den gemeinsamen kritischen Punkten ε_h die gleichen Umlaufsmatrizen A_h (Satz 7) und bilden eine *Klasse* $K_{\lambda\mu}$ Riemannscher Funktionssysteme, nämlich einen Modul mit $\mathsf{K}(z)$ als Koeffizientenbereich, der wegen $D_z(v; l) = 0$ mit jedem Element die Ableitung enthält, und worin ein System, nämlich V_j selbst, linear unabhängig ist. Zunächst gilt natürlich

Satz 10. *Die Basis $\dfrac{d^{k-1}V_j}{dz^{k-1}}$ der Klasse $K_{\lambda\mu}$ ist rational unabhängig.*

Denn aus $\sum_1^n Q_k(z)\dfrac{d^{k-1}V_j}{dz^{k-1}} = 0$ folgte, falls die $Q_k(z)$ nicht alle identisch verschwinden $\left|\dfrac{d^{k-1}V_j}{dz^{k-1}}\right| = 0$, was nach Satz 8 nicht möglich ist. (Es kann auch für kein einzelnes j eine Identität mit rationalen $Q_k(z)$

$$(31) \qquad \sum_1^n Q_k(z)\frac{d^{k-1}V_j}{dz^{k-1}} = 0$$

bestehen, da sie sonst wegen (11), (13) S. 82/83 sofort für alle j folgte.)

[1]) Allgemeiner Satz; s. *Perron* 12., S. 22.

Dem Modul $\mathfrak{M}'_m$ der Sätze 1, 2, 3 (in Verbindung mit den Bemerkungen § 1, S. 78) ist andrerseits ein Modul $\overline{K}_{\lambda\mu}$ zugeordnet, dessen Elemente Funktionssysteme der Form sind $\sum_{l_0}^{l_0+n-1} R_l(z) V_{j,\lambda+l}$, und zwar wegen Satz 3 bzw. 3* jedem m der gleiche. Wegen Satz 5 gehört auch die Ableitung jedes Elements zum Modul, während die lineare Unabhängigkeit der Elemente jedes Systems $(V_{j,\lambda+l})$ (l fest; $j = 1, 2, \ldots, n$) schon länger bekannt ist. Folglich ist $\overline{K}_{\lambda\mu}$ ebenfalls eine Riemannsche Klasse, und zwar ist nach Satz 4 bzw. 5

(32) $$K_{\lambda\mu} \neq \overline{K}_{\lambda\mu}.$$ Daraus folgt

Satz 11. *Die Basis $V_{j,\lambda+l_0}, \ldots, V_{j,\lambda+l_0+n-1}$ von $\overline{K}_{\lambda\mu}$ ist rational unabhängig.*

Denn sonst müßte auch die Basis $\frac{d^{k-1}V_j}{dz^{k-1}}$ von $K_{\lambda\mu}$ rational abhängig sein, das in $\overline{K}_{\lambda\mu}$ enthalten ist.

Hieraus ergibt sich eine Ergänzung zum arithmetischen Teil:

Satz 2.** *Die Basis $dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}$ von $\mathfrak{m}'_m$ ist rational unabhängig.*

Denn wäre die Summe $\sum_{l_0}^{l_0+n-1} R_l(z)\, dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} \equiv 0$, so ergäbe die Integration über die n Doppelschleifen einen Widerspruch zu Satz 11.

Nach U I S. 75 besteht eine Matrizengleichung der Gestalt

$$\left(\frac{d^{k-1}v_{j,\lambda+l_0}}{dz^{k-1}}\right) = (V_{j,\lambda+l})\,(R_{lk}(z)) \qquad \begin{bmatrix} j = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \\ l = l_0, \ldots, l_0 + n - 1 \end{bmatrix}$$

mit rationalen Funktionen $R_{lk}(z)$. Die Determinante der Matrix links verschwindet nicht identisch in z, folglich kann es auch keine der Determinanten der rechtsstehenden Matrizen. Also ist zunächst $(V_{j,\lambda+l}) = \left(\frac{d^{k-1}V_{j,\lambda+l_0}}{dz^{k-1}}\right)(R_{lk}(z))^{-1}$, d. h. auch

(33) $$\overline{K}_{\lambda\mu} \neq K_{\lambda\mu}.$$

Zusammen mit (32) gibt dies

Satz 12. *Die Klassen $K_{\lambda\mu}$ und $\overline{K}_{\lambda\mu}$ sind identisch.*

Endlich als letzte Folgerung:

Satz 13. *Die Funktionen $V_{j,\lambda+l}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) von l bilden ein F. S. der Differenzengleichung $\Delta_l(v; z) = 0$.*

Denn wenn man hätte $\sum_1^n D_j(z) V_{j,\lambda+l} = 0$ mit von l unabhängigen, in z beliebigen, aber nicht sämtlich verschwindenden $D_j(z)$, so folgte

$$|V_{j,\lambda+k}| = 0 \qquad \begin{bmatrix} j = 1, 2, \ldots, n \\ k = l, l+1, \ldots, l+n-1 \end{bmatrix},$$

was nicht der Fall ist.

Die *Hauptergebnisse der letzten Betrachtungen* lassen sich auch so zusammenfassen: Die n-Spalten jeder der beiden Matrizen

(34) $$(V_{j,\lambda+l}) \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^{k-1}V_{j,\lambda+l_0}}{dz^{k-1}}\right)$$

bilden eine rational unabhängige Basis einer und derselben Riemannschen Klasse $K_{\lambda\mu}$, die für jedes m dieselbe ist. Die Gruppe der Klasse ist durch Satz 7 vollständig gegeben.

Bevor wir uns zu den Ausnahmefällen wenden, betrachten wir zwei *anders zusammengesetzte Fundamentalsysteme*, und zwar immer noch unter der Annahme $\lambda \neq 0$, $\lambda + n\mu$ nicht ganz. Wir setzen nämlich

$$(35) \qquad W_h = \int\limits_{(t_h^+ \infty^+ t_h^- \infty^-)} = (1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}) \int\limits_{(t_h^+)} - (1 - \mathsf{M}) \int\limits_{(\infty^+)}.$$

Führt man hier mittels (7) S. 80 $\int\limits_{(0^+)}$ ein und berücksichtigt die Definition (29) S. 87, so findet man durch Umrechnung

$$(36) \qquad (1 - \Lambda)W_h = (1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n})V_h - (1 - \mathsf{M})P \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Da sich durch Multiplikation mit M^{-h} und Addition ergibt

$$(37) \qquad P = \sum_1^n{}_j \mathsf{M}^{-j} W_j,$$

so läßt sich das System (36) nach den V_h auflösen, und diese ergeben sich als lineare homogene Funktionen der W_h. Die letzteren bilden daher ebenfalls ein F. S. von $D_z(v; l) = 0$. Wir wollen dies jedoch noch auf einem direkten Wege entsprechend wie Satz 8 beweisen, da dieser Beweis sich im Gegensatz zum vorhergehenden auf einen nachher [1]) zu behandelnden Grenzfall übertragen läßt.

Bemerken wir, daß man für die Umlaufssubstitutionen der W_j an den Stellen ε_h nach Satz 7 und (30) S. 87 erhält

$$(38) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Theta_h W_h = W_{h+1} \\ \Theta_h W_{h+1} = \mathsf{M} W_h + (1 - \mathsf{M}) W_{h+1} \\ \Theta_h W_j = W_j \quad (j \neq h, h+1) \end{array}\right\} \; h \neq n, \qquad \text{dagegen}$$

$$(38') \qquad \begin{cases} \Theta_n W_1 - W_1 = -(\Lambda\mathsf{M} + 1 - \mathsf{M})\Omega \\ \Theta_n W_j - W_j = -(1 - \mathsf{M})\Omega \qquad \text{für } j = 2, \ldots, n-1 \\ \Theta_n W_n - W_n = \quad \mathsf{M}\Omega, \qquad \text{wobei} \end{cases}$$

$$(38'') \qquad \Omega = \Lambda^{-1} W_1 - W_n + \Lambda^{-1}(1 - \mathsf{M})P.$$

Aus der Annahme

$\sum\limits_1^n{}_j C_j W_j = 0$ mit $\sum\limits_1^n{}_j |C_j| > 0$ folgte daher wie oben S. 83/84 $C_j \neq 0$ für alle j sowie

$$(39) \qquad C_j = \mathsf{M}^{n-j} C_n \; (j = 1, 2, \ldots, n-1) \quad \text{und mit Hilfe von (38')}$$

$$\mathsf{M}C_n - \Lambda\mathsf{M}C_1 - (1 - \mathsf{M}) \sum_1^{n-1}{}_j C_j = 0 \qquad \text{oder nach (39)}$$

$$(40) \qquad \mathsf{M}^n(1 - \Lambda)\, C_n = 0, \text{ was nicht der Fall.}$$ Hierbei wurde benutzt, daß die Differenzen $W_h - W_{h+1} = \dfrac{1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}}{1 - \mathsf{M}} \int\limits_{(t_h^+ t_{h+1}^+ t_h^- t_{h+1}^-)}$ nach S. 84/85 nicht verschwinden, während sich nach (38'') und (35), (7) zeigt, daß

$$(41) \qquad \Omega = \Lambda^{-1}(1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}) \Big(\int\limits_{(t_1^+)} - \Lambda \int\limits_{(t_n^+)} - (1 - \mathsf{M}) \int\limits_{(0^+)} \Big),$$

wobei die Klammer schon S. 85, Gl. (23') behandelt ist. — Wir erwähnen endlich noch kurz die Möglichkeit,

---

[1]) Siehe unten S. 93.

$$U_h = \int_{(t_h^+ t_{h+1}^+ t_h^- t_{h+1}^-)} = \frac{1-\mathsf{M}}{1-\Lambda}(V_h - V_{h+1}) = \frac{1-\mathsf{M}}{1-\Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}}(W_h - W_{h+1}) \quad (h = 1, 2, \ldots, n-1)$$

zusammen mit

$$(U_n =)\ P = -\Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}\sum_1^n \mathsf{M}^{n-j} V_j = \sum_1^n \mathsf{M}^{-j} W_j$$

als F. S. einzuführen, wobei man sich von der Möglichkeit der Auflösung nach den V_j oder W_j überzeugen kann.

§ 3. Die Ausnahmefälle und das Randwertproblem.

Wir haben nun die Fälle A), B), C) für die Integrale zu betrachten, die schon in Abschn. I, S. 74 eine besondere Untersuchung erforderten. Dabei wird es sich als zweckmäßig herausstellen, gewisse *Grenzübergänge* an unseren Schleifenintegralen vorzunehmen. Hierzu sei im voraus zusammenfassend bemerkt — ohne daß wir die Beweise ausführlich geben wollen, was mehr weitläufig als schwierig wäre —:

1. daß die auftretenden *Grenzübergänge unter dem Integralzeichen* sämtlich zulässig sind, d. h. daß

$$\lim \int = \int \lim, \tag{42}$$

obwohl es sich teilweise um uneigentliche Integrale handelt.

2. daß auch jetzt die *Kongruenzen von Abschn. I in Gleichungen* übergehen, vorausgesetzt, daß keine Indizes l auftreten, die den unten [1]) jeweils angegebenen Bedingungen für die betreffende Grenzbetrachtung widersprechen. Dies folgt einfach daraus, daß die rechte Seite einer Nullkongruenz zunächst bei Integration mit den allgemeinen Annahmen in Null übergeht, daher es auch im Grenzwert bleiben muß, während links (42) anwendbar ist.

Und zwar gilt dies auch für die Ableitungen enthaltenden Relationen; das *Schema* der Operationsvertauschungen ist dann dieses

$$\lim \int \frac{\partial}{\partial z} = \lim \frac{d}{dz}\int = \frac{d}{dz}\lim \int = \frac{d}{dz}\int \lim;$$

es wird für den Fall $\mathrm{B})_2$ S. 94 als Beispiel ausführlicher angegeben. Insbesondere bleibt daher die *Differentialgleichung* stets erfüllt, dagegen die *Differenzengleichung* nicht notwendig für alle l, sie gestattet vielmehr nur eine Reduktion innerhalb der gleich im einzelnen anzugebenden Spielräume, da beim Überschreiten der Grenzen derselben (die als ganzzahlige singuläre Punkte der Differenzengleichung fungieren), die Integrationswege alle oder teilweise abzuändern sind (z. B. $l = 0$ für die Fälle B), C) S. 94. Geschlossene und daher für alle l einheitlich anwendbare Integrationswege sind zwar auffindbar, allein sie liefern nicht mehr *für alle l n* linear unabhängige Integrale, und man findet nach Art der Nekrassoffschen [2]) Beweisführung, daß es in all den Fällen, wo wir unten zu hinsichtlich $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$ ungeschlossenen Wegen übergehen werden, nicht möglich ist, mit geschlossenen Integrationswegen ein F. S. zu bilden, es ist dazu mindestens *ein* offener Weg nötig. Auf die Grenzgestalt der Differenzengleichung am Rande ihres Regularitätsbereichs

---

[1]) S. 91 ff.

[2]) 9., S. 518; die Maximalzahl der lin. unabh. bestimmten Integrale ist nämlich, falls an den schlichten Stellen der τ-Ebene keine Pole des Differentials liegen, nach Nekrassoff gleich $N-2$, falls N die Zahl der (wirklichen!) Verzweigungspunkte bedeutet; also $< n$, wenn N sich auf $n+1$ oder n reduziert.

kommen wir in einem Falle [1]) ausführlich zurück. Die *einheitliche* Basisdarstellung der Differentiale, die wir S. 74 für die Fälle A), B), C) ($m \geqq -1$) geleistet haben, überträgt sich auf die Integralsysteme *nicht*; wohl aber hat man eine solche jeweils innerhalb der unten angegebenen Schranken $A)_1$, $A)_2$ usw., soweit für diese *eine* Wegwahl hinreicht. In dieser Art modifizieren sich auch, ohne daß wir das im einzelnen ausführen, die Klassenbetrachtungen S. 88.

3. Die *Gruppe* ergibt sich — abgesehen von den Lückenfällen [2]) — durch einfache sinngemäße Spezialisierung bzw. Grenzübergang. Daher können auch Logarithmen nur für $\mu = \frac{1}{2}$ hereinkommen, wie sich das allgemein schon aus den an (25), (27) S. 86 anknüpfenden, auch für $\Lambda = 1$ oder $\Lambda \mathsf{M}^n = 1$ gültigen Betrachtungen ergibt.

Es sollen jetzt die Ausnahmefälle der Reihe nach betrachtet werden, und zwar in der nämlichen Reihenfolge wie in Abschn. I, S. 74. Sei also

A) $\lambda \neq 0$. $\lambda + n\mu = g$ *ganz.*

Wie S. 81 werde definiert $V_h = \int_{(t_h^+ 0^+ t_h^- 0^-)}$. Führt man jetzt die Untersuchung von § 2, S. 83 ff. auf lineare Abhängigkeit durch, so erweist sich (21) wegen $e^{2\pi i(\lambda + n\mu)} = e^{2\pi i g} = 1$ erfüllt und daher sind mit den Werten

$$C_j = \mathsf{M}^{n-j} C \tag{19}$$

(17) und (18) befriedigt; d. h. es gilt mit der Schreibweise (29) $\Theta_h P_{\lambda+l} = P_{\lambda+l}$. Dann und nur dann, wenn die demnach rationale Funktion $P(z)$ identisch verschwindet, sind die V_h linear abhängig; *nur* dann, weil (19) die einzige Lösung von (17), (18) ist; denn die dort auftretenden zweiten Klammern sind wegen $\lambda \neq 0$ nach dem Beweis von S. 84/85 auch jetzt von Null verschieden. Wegen (29) ist aber nunmehr $P = (1 - \Lambda) \int_{(\infty^+)}$, und rechts steht bis auf einem festen Faktor $\neq 0$ das Residuum von $dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}$ an der nunmehr unverzweigten Stelle $\tau = \infty$. Dieses Residuum aber ist der Faktor von $\tau'^{-1} d\tau'$ in der Entwicklung

$$dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)} = -\tau'^{-(nm+g+1+l)}(1 - nz\tau'^{n-1} + (n-1)\tau'^{n})^{\mu+m} \frac{d\tau'}{\tau'} \text{ an der Stelle } \tau' = 0,$$

also ein *Polynom*, das aber für $l < -(nm + g + 1)$ stets identisch verschwindet. Wir haben daher zwei Fälle zu unterscheiden:

$A)_1$ $\quad l \geqq -(nm + g + 1)$ und

$A)_2$ $\quad l < -(nm + g + 1)$.

Führen wir im *Falle* $A)_1$ die Entwicklung durch:

$$\left(\tau'^n f\left(\frac{1}{\tau'}\right)\right)^{\mu+m} = \sum_0^\infty{}_k (-1)^k \binom{\mu+m}{k} \cdot \tau'^{k(n-1)}(nz - (n-1)\tau')^k \tag{43}$$

für $|\tau'|$ hinr. klein,

$$= \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu \tau'^\nu,$$

so sieht man, daß nur diejenigen a_ν von Null verschieden sein können, für die ν von der Form

---

[1]) Siehe unten S. 104, Gl. (26′).

[2]) Siehe unten S. 92, (45).

$$k(n-1)+k' \qquad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ k' = 0, 1, 2, \ldots, k \end{matrix}$$

Damit sind alle und nur die Werte ν ausgeschlossen, für die

$$(44) \qquad (k-1)n < \nu < k(n-1) \qquad k = 1, 2, \ldots, n-2,$$

d. h. also

$$(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1 = \binom{n-1}{2},$$

Werte, zu denen jeweils für

$$(44') \qquad l = \nu - nm - g - 1$$

das betreffende Polynom verschwindet. Diese l-Werte mögen *Lückenwerte* heißen. — Ist *ν nicht von der Form* (44), so verschwindet das Residuum auch wirklich nicht, da jede Kombination (k, k') mit

$$(44'') \qquad \nu = k(n-1)+k'$$

für das Polynom ein Glied $z^{k-k'}$ beisteuert, verschiedene Kombinationen mit gleichem ν daher lauter verschiedene Potenzen von z ergeben [1]). In diesem Falle sind also *die V_h linear unabhängig*, es gibt ein Polynom, und kein weiteres, wie sich nunmehr wie Satz 8a ergibt.

Im *Lückenfall* bilden wir mit $\mu \neq \mu_0 = \frac{g-\lambda}{n}$, ähnlich wie man das sonst bei linearen Differentialgleichungen tut, das Integral von $D_z(v; l)|_\mu = 0$

$$\frac{\sum_1^n j \mathsf{M}^{-j} V_{j,\lambda+l}^{(\mu+m)} - \mathsf{M}_0^{-j} V_{j,\lambda+l}^{(\mu_0+m)}}{\mu - \mu_0},$$

dessen Grenzwert für $\mu \to \mu_0$ $D_z(v; l)|_{\mu_0} = 0$ erfüllen muß. Dieser ist

$$(45) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \sum_1^n e^{-2\pi i j \mu} V_{j,\lambda+l}^{(\mu+m)}\right)_{\mu=\mu_0} = \sum_1^n \mathsf{M}_0^{-j} \Big(j V_{j,\lambda+l}^{(\mu_0+\mu)} + \int_{(t_j^+ 0^+ t_j^- 0^-)} \tau^{\lambda+l} f^{\mu_0+m} \lg f \, d\tau\Big).$$

Sollte diese Funktion identisch verschwinden, so kann fortdifferenziert werden, wobei, da P in μ nicht identisch Null ist, nach endlich vielen Schritten ein nicht verschwindendes Ersatzintegral erscheint. Wir müssen es allerdings dahingestellt sein lassen, ob sich dieses nicht etwa auch als Integral über ein Differential von $\mathfrak{m}'_{\lambda\mu}$ darstellen läßt.

Im Falle $\mathrm{A})_2$ sind die V_h linear abhängig. Ferner verschwindet

$$W_j = (1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}) \int_{(t_j^+)} - (1 - \mathsf{M}) \int_{(\infty^+)}$$

identisch. Statt dessen bilden wir W_j mit

$$(46) \qquad \mu = \frac{g-\lambda}{n} + \varepsilon$$

bei hinreichend kleinem reellem ε. Dann bleibt die $\mathrm{A})_2$ entsprechende Bedingung

$$\overline{\mathrm{A}})_2 \qquad l < -(nm + \lambda + n\mu + 1)$$

---

[1]) Wir bemerken nebenbei, daß aus $\nu = kn - (k-k') = sn - (s-s')$ folgt $k - k' \equiv s - s' \mod n$. Die in einem solchen Polynom auftretenden Exponenten werden also nach Subtraktion von $k''_{0\nu}$ sämtlich Vielfache von n; dabei ist $k''_{0,\nu}$ so erklärt: $k_{0,\nu}$ sei die kleinste Zahl $\geqq 0$, für die eine Darstellung $\nu = k_{0,\nu}\, n - k''_{0\nu}$ mit $0 \leqq k''_{0\nu} \leqq k_{0\nu}$ existiert, d. h. also in der Bezeichnung von Satz 15: $k_{0,\nu} = \underline{\overline{\frac{\nu}{n}}} \cdot z^{-k''_{0\nu}} P_{\lambda+\nu-nm-\varrho-1}(z)$ ist dann ein Polynom in z^n allein, in dem alle Potenzen von z^n bis zur einer höchsten, etwa der r_ν-ten, auftreten; der Grad r_ν in z^n ist dann $\left[\frac{k_{0\nu} - k''_0}{n-1}\right]$.

richtig, und man kann ohne Wertänderung τ_0 innerhalb $\Im \to \infty$ rücken lassen, wobei dann $\int \to 0$ wegen $\bar{A})_2$. Also ist unter der Annahme (46)
$\tau_0 \infty^+ \tau_0$

$$W_j = (1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}) \int\limits_{(\infty\, t_j^+ \infty)} dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}$$

und man kann daher bilden

$$(47) \qquad \overline{W}_{j,\lambda+l}^{\left(\frac{g-\lambda}{n}+m\right)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{W_{j,\lambda+l}^{(\mu+m)}}{1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}} = \int\limits_{(\infty\, t_j^+ \infty)} dv_{\lambda+l}^{\left(\frac{g-\lambda}{n}+m\right)}.$$

Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit der $\overline{W}_h$ muß man beachten, daß für sie die Umlaufsbeziehungen (38) S. 89 gültig sind, wobei nur für λ, μ die richtigen Werte einzusetzen sind und an Stelle von Ω zu treten hat $\bar{\Omega} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\Omega}{1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}}$. Dieser Grenzwert existiert wegen (41) und ist nicht Null. Daher ergibt sich wie dort unter Benutzung von $\Lambda \neq 1$ die lineare Unabhängigkeit, und nachdem sie festgestellt ist, die Nichtexistenz einer Polynomlösung. Diese würde nämlich auf die nicht erfüllte Bedingung (40) führen. Wir formulieren

Satz 14. A). *Für* $\lambda + n\mu = ganz$, $\lambda \neq 0$ *bleiben (abgesehen von* $\binom{n-1}{2}$ *Lückenfällen)*

1.) *für* $l \geqq -(nm + g + 1)$ *die* $V_h = \int\limits_{(t_h^+ 0^+ t_h^- 0^-)}$ *ein F. S.; es gibt ein hieraus linear zusammengesetztes Polynom, das auch als Residuum im Unendlichen definiert werden kann. Dagegen bilden im Fall*

2.) $l < -(nm + g + 1)$ *die* $\overline{W}_h = \int\limits_{(\infty\, t_h^+ \infty)}$ *ein F. S.; man hat offene Wege, die sich nicht sämtlich vermeiden lassen; ein Polynom existiert nicht.*

Es sei jetzt:

B) $\lambda = 0$; $\lambda + \mu n = \mu n$ *nicht ganz* (z. B. $\mu = \dfrac{1}{2}$, $n = 3$; Pincherlescher Fall, Anhang S. 111). Für jedes h wird jetzt

$$V_{h,l} = -(1 - \mathsf{M}) \int\limits_{(0^+)} dv_l^{(\mu+m)} = -(1 - \mathsf{M})\, 2\pi i \operatorname*{Res}_{\tau=0} dv_l^{(\mu+m)}.$$

Das Residuum ist ein Polynom, das wie die Reihenentwicklung

$$(48) \qquad \frac{f^{\mu+m}(\tau, z)}{(n-1)^{\mu+m}} = \sum_0^\infty{}^{k} (-1)^k \binom{\mu+m}{k} \tau^k \left(\frac{nz}{n-1} - \tau^{n-1}\right)^k$$

zeigt, für $l \geqq 0$ identisch verschwindet, für $l < 0$ dagegen niemals.

Sei also

$B)_1$ $\qquad l < 0.$

Wir ziehen die $W_h = \int\limits_{(\infty^+ t_h^+ \infty^- t_h^-)}$ heran, deren Definition ungeändert gültig bleibt. Die Untersuchung S. 89 erweist in der Tat (40) erfüllt; die einzig für Verschwinden in Frage kommende Kombination

$P_l(z) = \sum_1^n \mathsf{M}^{-i} W_j$ tut dies jedoch nicht, da sie nach (29) gerade

$= -(1 - \mathsf{M}^{-n}) \int_{(0^+)}$, d. h. bis auf einen festen Faktor $\neq 0$ das obige

Polynom, und das ist das einzige [1]). Die W_h bilden ein F. S.

B)$_2$ $l \geqq 0$. Die V_j verschwinden alle, wir bilden mit $\Re(\lambda) > 0$

$$(48{,}5)\quad V_{j,\lambda+l} = (1 - \mathsf{M}) \int_{(\tau_0 0^+ \tau_0)} - (1 - \Lambda) \int_{(\tau_0 t_j^+ \tau_0)} = -(1 - \Lambda) \int_{(0 t_j^+ 0)} \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m} d\tau,$$

da das Integral am Nullpunkt konvergiert. Man bilde jetzt

$$(49)\qquad \bar{V}_{j,l} = \lim_{\lambda \to 1} \frac{V_{j,\lambda+l}}{1 - \Lambda} = \int_{(0 t_j^+ 0)} \tau^l f^{\mu+m} d\tau.$$

Man schließt wie S. 83/84 unter Berücksichtigung von $\bar{V}_h - \bar{V}_{h+1} \neq 0$, daß die $\bar{V}_{j,l}$ linear unabhängig sind. Eine Polynomlösung gibt es nicht, da die Bedingung (21) $1 - \mathsf{M}^n = 0$ nicht erfüllt ist [2]).

Satz 14. B). *Für $\lambda = 0$, $n\mu$ nicht ganz bleiben (ohne Ausnahme)*

1.) *für $l < 0$ die $W_h = \int_{(t_h^+ \infty^+ t_h^- \infty^-)}$ ein F. S.; es gibt ein hieraus sich linear zusammen-*

setzendes Polynom, das auch als Residuum am Nullpunkt definiert werden kann. Dagegen bilden im Falle

2.) *$l \geqq 0$ die $\bar{V}_h = \int_{(0 t_h^+ 0)}$ ein F. S.; man hat offene Wege, die sich nicht sämtlich*

vermeiden lassen, ein Polynom existiert nicht.

Es bleibt zu erledigen Fall

C) $\lambda = 0$, $\mu n = g$ *ganz* $(1 \leqq g \leqq n - 1)$ (z. B. $\mu = \frac{1}{2}$, $n = 2$, $g = 1$; Legendrescher Fall, Anhang S. 110). Sowohl die V_j wie die W_j werden einfache Residuen. Wir unterscheiden

C)$_1$ $\qquad l \geqq -(nm + g + 1)$ *und zugleich* $l \geqq 0$.

Es sind die Annahmen von A)$_1$ und B)$_2$ vereinigt. Wir bilden die

$$\bar{V}_j = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{1 - \Lambda} V_{j,\lambda+l}^{\left(\frac{g}{n}\right)} = \int_{(0 t_j^+ 0)} \tau^l f^{\frac{g}{n}+m} d\tau.$$

Es ist $1 - \mathsf{M}^n = 0$ und daher ein Polynom vorhanden:

$$P_l(z) = -\sum_1^n e^{-\frac{2\pi i g j}{n}} \bar{V}_{j,l}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)},$$

das als Residuum im Unendlichen (abgesehen von Lückenfällen, die wie S. 92 zu behandeln sind), nicht verschwindet.

---

[1]) $P_{-(\nu+1)}(z)$ ist *genau* vom Grade ν und hat nur Glieder mit mod. n kongruenten Exponenten.

[2]) Hier sei als Beispiel die Hilfsbetrachtung angedeutet, die für den Übergang von Differentialkongruenzen zu Gleichungen wichtig ist:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{1 - \Lambda} \int_{(t_j^+ 0^+ t_j^- 0^-)} \frac{\partial}{\partial z} dv_{\lambda+l} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - \Lambda} \int_{(t_j^+ 0^+ t_j^- 0)} dv_{\lambda \to l} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{d}{dz} \int_{(0 t_j^+ 0)} dv_{\lambda+l} = \frac{d}{dz} \int_{(0 t_j^+ 0)} dv_l.$$

C)$_2$ $\qquad l < -(nm + g + 1)$ *und zugleich* $l < -1$.

Es wird gebildet

$$\overline{W}_j = \lim_{\mu \to \frac{g}{n}} \frac{W_{j,l}^{(n+m)}}{1 - \mathsf{M}^{-n}} = \int_{(\infty t_j^+ \infty)} \tau^l f^{\frac{g}{n}+m} d\tau .$$

Die Bedingung (40) ist erfüllt und führt zu dem Polynom

$$\overline{P}_l(z) = -\sum_1^n{}_j \, e^{-\frac{2\pi i g j}{n}} \overline{W}_{jl}^{\left(\frac{g}{n}+m\right)},$$

das als Residuum am Nullpunkt niemals verschwindet.

Es bleiben noch zwei Möglichkeiten, die aber nur für endlich viele Werte l in Betracht kommen. Zunächst:

C)$_{3\alpha}$ $\qquad 0 \leqq l < -nm - g - 1$ (nur für $m < -1$ möglich!).

Hier kann sowohl in den Nullpunkt wie in den Punkt ∞ hineinintegriert werden; wir können daher wie soeben die $\overline{V}_{j,l}$ oder $\overline{W}_{j,l}$ bilden; doch ist $\Sigma \mathsf{M}^{-j} \overline{V}_{j,l} = \Sigma \mathsf{M}^{-j} \overline{W}_{j,l} = 0$, während je $n - 1$ derselben unabhängig sind; noch immer gilt nämlich die öfters durchgeführte Betrachtung, wonach die angegebene die einzige eindeutige lineare Kombination ist. Um ein Ersatzintegral zu gewinnen, lassen wir in $P_{\lambda+l}^{(\mu+m)}(z)$ λ, μ zunächst in der Nachbarschaft der hier betrachteten Spezialwerte (und zwar so daß die Konvergenz der Integrale in 0 und ∞ erhalten bleibt) und ziehen τ_0 in den Nullpunkt. Es wird

$$P_{\lambda+l}^{(\mu+m)}(z) = (1 - \Lambda)(1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n}) \int_0^\infty dv_{\lambda+l}^{(\mu+m)}, \quad \text{und jetzt ist}$$

$\overline{\overline{P}} = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \mu \to \frac{g}{n}}} \dfrac{P_{\lambda+l}^{(\mu+m)}}{(1 - \Lambda)(1 - \Lambda^{-1}\mathsf{M}^{-n})} = \int_0^\infty \tau^l f^{\frac{g}{n}+m} d\tau$ das Zusatzintegral. Man findet nach (30)

(50) $\qquad \Theta_h \overline{\overline{P}} = \overline{\overline{P}} \qquad (h \not\equiv n),$

$$\Theta_n \overline{\overline{P}} = \overline{V}_1 - \overline{V}_n + \overline{\overline{P}}.$$

Daraus ergibt sich die Unabhängigkeit von den $\overline{V}_j$. Wäre nämlich

$$\overline{\overline{P}} = \sum_1^n{}_j \, C_j \overline{V}_j, \text{ so folgte in gewöhnlicher Weise}$$

(51) $\qquad C_j = \mathsf{M}^{n-j} C_n,$

und schließlich an der Stelle $z = 1$ nach Satz 7

$\Theta_n \overline{\overline{P}} = (\overline{V}_1 - \overline{V}_n)(C_n - \mathsf{M}C_1) + \overline{\overline{P}}$, also nach (50) wegen $\overline{V}_1 - \overline{V}_n \not\equiv 0$

(52) $\qquad C_n - \mathsf{M}C_1 = 1,$

was mit (51) gäbe (wegen $\mathsf{M}^n = 1$)

$$C_1 = C_1 + \mathsf{M}^{n-1}, \text{ was unmöglich ist.}$$

Es gibt keine Polynomlösung.

Als letzter Fall kommt (nur für $m > -1$) in Betracht

C)$_{3\beta}$ $\qquad -nm - g - 1 \leqq l < 0.$

Jetzt kann das Integral weder nach 0, noch nach ∞ hineingeführt werden. Man erhält jetzt zwei Polynome

$$Q_0 = \int_{(0^+)} dv_l^{\left(\frac{g}{n}+m\right)} \text{ und } Q_\infty = \int_{(\infty^+)} dv_l^{\left(\frac{g}{n}+m\right)},$$

deren erstes niemals verschwindet, das zweite nur in Lückenfällen. Nach (7) ergibt sich

$$(53)\qquad Q_0 + Q_\infty = -\sum_1^n \mathsf{M}^{-j} \int_{(t_j^+)} = -\frac{1}{1-\mathsf{M}} \sum_1^n \mathsf{M}^{-j} \left(\int_{(t_j)} - \int_{(t_{j+1})} \right)$$

$$= -\frac{1}{1-\mathsf{M}} \sum_1^n \mathsf{M}^{-j} U_j,$$

wenn wir die Bezeichnungen von S. 90 aufnehmen und überdies $U_n = \int_{(t_n)} - \int_{(t_1)}$ setzen,

so daß $\sum_1^n U_j = 0$.

Wir wollen zeigen, daß keine davon unabhängige lineare Relation zwischen den U_j mehr besteht, so daß also die U_j eine $(n-1)$-dimensionale Schar bilden. Die Umlaufsrelationen werden nämlich für $n > 2$

$$\begin{cases} \Theta_h U_{h-1} = U_{h-1} + U_h & h = 1, 2, \ldots, n \\ \Theta_h U_h = -\mathsf{M} U_h & U_0 = U_n \\ \Theta_h U_{h+1} = \mathsf{M} U_h + U_{h+1} & U_{n+1} = U_1 \end{cases}$$

und $\Theta_h U_j = U_j$ für $j \neq h, h \pm 1$.

Aus $\sum_1^n C_j U_j = 0$ folgt daher

$$C_h - (1+\mathsf{M}) C_{h+1} + \mathsf{M} C_{h+2} = 0 \qquad (C_{h+1} = C_1, C_{h+2} = C_2).$$

Dieses System linearer homogener Gleichungen hat den Rang $n-2$, da die Hauptunterdeterminante links oben eins ist. Als linear unabhängige Lösungen ergeben sich

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = C \qquad \text{und}$$

$$(54)\qquad C_h = C\mathsf{M}^{-h}.$$

Die zweite Lösung führt auf das Polynom $Q_0 + Q_\infty$, welches nicht verschwindet, wie die Gradbetrachtung lehrt[1]). Daraus folgt, daß $n-1$ der U_j linear unabhängig sind. Wir werden daher $U_1, \ldots, U_{n-1}$; Q_0 als F. S. ins Auge fassen und finden, falls Q_0 von den U_j abhängig sein sollte, wieder das System (54). Wenn daher Q_∞ nicht verschwindet (zu Q_0 proportional kann es nicht sein wegen des Grades!), ist nach (53) Q_0 in der Tat von den U_j unabhängig. Für Lückenfälle $Q_\infty = 0$ ist wieder S. 92 heranzuziehen.

Für $n = 2$, $\mathsf{M} = -1$ sind $\int_{(0^+)}$ und $\int_{\infty^+}$ unabhängig. $\int_{(0^+)} + \int_{(\infty^+)} = \int_{(t_1^+)} - \int_{(t_2^+)}$

Satz 14. C). *Für $\lambda = 0$; $\mu = g$ ganz bleiben (abgesehen von höchstens $\binom{n-1}{2}$ Ausnahmen)*

1.) *für $l \geqq -(nm+g+1)$ und $l \geqq 0$ die $\overline{V}_h = \int_{(0\, t_h^+ 0)}$ als F. S. brauchbar; es gibt ein Polynom (Residuum im Unendlichen).*

2.) *Für $l < -(nm+g+1)$ und $l < 0$ ebenso die $\overline{W}_h = \int_{(\infty\, t_h^+ \infty)}$, die ein nie verschwindendes Polynom (Residuum am Nullpunkt) erzeugen.*

3.)$_\alpha$ *Für $0 \leqq l < -nm-g-1$ tritt zu den $\overline{V}_j$ oder $\overline{W}_j$ noch $\int_0^\infty dv_l^{\left(\frac{g}{n}+m\right)}$, und*

---

[1]) Anmerkung S. 92 und 94.

3.)$_\beta$ *für* $-nm-g-1 \leqq l < 0$ *erscheinen* zwei *Polynome neben der* $(n-1)$*-dimensionalen Schar der* $U_j = \int\limits_{(t_j^+)}^{} - \int\limits_{(t_{j+1}^+)}^{}$.

Die Betrachtung der Sonderfälle ist damit erledigt.

Soweit das Ergebnis *Polynomlösungen* betrifft, kann es noch übersichtlicher formuliert werden, wenn wir es als Antwort auf folgende *Randwertaufgabe im Komplexen* ansehen.

Vorgelegt sei die Differentialgleichung (2) S. 79. Die auftretenden Größen $\mu \neq 0$, m ganz, seien fest; dagegen $\lambda + l$ als Parameter aufgefaßt. Gesucht sind alle Parameterwerte, für die (nichttriviale) Lösungen vorhanden sind, die an den endlichen singulären Stellen unverzweigt sind, sowie diese Lösungen selbst.

Eine solche Lösung ist nach dem Beweis zu Satz 8a S. 86 eine rationale Funktion und nach den letzten Betrachtungen stets ein Polynom. Die Polynomfälle aber sind in diesem Paragraphen aufgefunden, und es ist auch gezeigt, daß es keine andere Polynome geben kann als die aufgestellten. Das Ergebnis für diese läßt sich noch durchsichtiger aussprechen in

Satz 15. *Faßt man* $\lambda + l$ *als Eigenwertsparameter der Differentialgleichung auf, so ergeben sich folgende beiden Reihen von Eigenwerten nebst zugehörigen Polynomen als Eigenlösungen:*

1.) $\lambda = 0$, l *negativ ganz* (*Res. am Nullpunkt*),

2.) $\lambda = g - \mu n$, $l + nm + g + 2$ *positiv ganz* (*Res. im Unendlichen*).

In 2.) ist dabei $g = \overline{\Re(\mu n)}$ = kleinste ganze Zahl $\geqq \Re(\mu n)$, und ferner sind gewisse $\binom{n-1}{2}$ l-Werte auszuschließen; für die das Residuum identisch Null wird (Lückenwerte).

Für $m > -1$, $\mu n = g$ ganz überschneiden sich beide Reihen in den Werten $-nm-g-1 \leqq l < 0$. Es gibt dann sogar zwei Polynome, wenn l nicht gerade Lückenwert ist. Für $m < -1$ kommen (auch für μn ganz) die Werte $0 \leqq l < -nm-g-1$ in keiner der beiden Reihen vor. Dann gibt es gar kein Polynom für diese Werte.

Zum Abschluß dieses Kapitels werfen wir noch einen kurzen Blick auf den Fall λ, μ *rational*, wo es sich also um *Integrale algebraischer Differentiale* handelt. Im *allgemeinen Fall* sind unsere Doppelschleifenintegrale V_h jedenfalls Perioden; die Wege könnten auf der jetzt über der τ-Ebene zu konstruierenden Riemannschen Fläche $\Re_\tau$ für die algebraische Funktion $\tau^\lambda f^\mu(\tau; z)$ von τ gedeutet werden. Man hat jedenfalls

$$n \leqq 2p + L, \tag{55}$$

wenn p das Geschlecht, L die Zahl der τ-Werte, die Polen 1. Ordnung des Differentials entsprechen. Es braucht durchaus nicht das Gleichheitszeichen zu gelten, da nämlich nur um gewisse Einheitswurzeln $\mathsf{\Lambda}^r\mathsf{M}^s$ verschiedene Integralwerte (deren Wege in $\Re_\tau$ kongruent übereinander liegen) im Körper K aller Zahlen linear abhängig sind, es aber nicht im Körper P der rationalen Zahlen zu sein brauchen [1]). Dies bemerkt in seinem Falle auch *Broecker* 1.) S. 19/20. In den *Ausnahmefällen* dagegen brauchen nicht alle aufgestellten Integrale Perioden zu sein (nur für $\mathrm{A})_1$, $\mathrm{B})_1$, $\mathrm{C})_{3\beta}$ sind sie es). Sonst kann nur (im Blick auf die stets vorhandenen Periodenintegrale U_j) gesagt werden $n - 1 \leqq 2p + L$, oder aber, wenn nur $n-2$ unabhängige U_j existieren $n - 2 \leqq 2p + L$. Es ist also z. B. denkbar $n = 2p + 1$ mit $L = 0$, so daß mehr Integrale als Perioden vorhanden sind.

---

[1]) Letzteres ist nur für $\mathsf{\Lambda} = \pm 1$, $\mathsf{M} = -1$ der Fall!

Als Beispiele seien die *hyperelliptischen Fälle* zusammengestellt. Man hat hier $\mu = \frac{1}{2}$ und, wenn der *allgemeine Fall* vorliegen soll, $\lambda = \frac{1}{2}$, $n = 2n'$ gerade. Es wird

$$dv_{l+\frac{1}{2}}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\tau^{l+1} f^{m+1} d\tau}{\sqrt{\tau(\tau^n - nz\tau + n - 1)}} \tag{56}$$

und wegen $n + 1 = 2p + 1 \quad p = n' = \frac{n}{2}$; die Periodenzahl wird genau n.

Für $\lambda = \frac{1}{2}$, $n = 2n' + 1$ ungerade liegt Ausnahmefall A) vor. Aus (56) ist jetzt zu schließen $n + 1 = 2p + 2$, $p = n' = \frac{n-1}{2}$. Für $A)_1$ erklärt sich dies durch einen logarithmischen Punkt im Unendlichen, für $A)_2$ aber durch Hinzutritt *eines* offenen Integrals zu den $n - 1 = 2p$ geschlossenen U_j.

Für $\lambda = 0$, $n = 2n' + 1$ ungerade hat man Fall B). Es wird

$$dv_l^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\tau^l f^{m+1} d\tau}{\sqrt{\tau^n - nz\tau + n - 1}}, \quad n = 2p + 1, \quad p = n' = \frac{n-1}{2}. \tag{57}$$

Für $B)_1$ hat man wieder ein Integral 3. Gattung,
für $B)_2$ einen offenen Weg neben $n - 1 = 2p$ geschlossenen.

Für $\lambda = 0, n = 2n'$ gerade ist in (57) $n = 2p + 2$.

Im Falle $C)_1$ hat man (aus den $\overline{V}_h$ bildbar) $n - 1 = 2p + 1$ Integrale U_j über geschlossene Integrationswege, und einen ungeschlossenen. Man kann, wenn man will, die Doppelschleifen $(t_j^+ t_{j+1}^+ t_j^- t_{j+1}^-)$ auf $n - 2 = 2p$ beschränken, um dann noch das Residuum im Unendlichen und eines der $\overline{V}_h$ hinzuzunehmen (dies entspricht der üblichen Darstellung durch $2p$ eigentliche Perioden und eine logarithmische; vgl. Beziehung (53), die auch hier mit $Q_0 = 0$ anwendbar ist). Ähnlich für $C)_2$, nur daß jetzt das Residuum am Nullpunkt erwächst. Für $C)_{3\alpha}$ hat man $n - 2 = 2p$ Integrale U_j, nebst zwei offenen Wegen, etwa $(0 t_1^+ 0)$ und (0∞).

Für $C)_{3\beta}$ kommen zu den U_j die zwei Residuen in 0 und ∞.

Bei dieser Übersicht haben wir von den Lückenfällen abgesehen.

III. Abschnitt. Asymptotische Darstellungen und Reihenentwicklungen.

§ 1. Der Satz von Poincaré und die asymptotischen Formeln.

Wir schreiben nach Division mit l die Differenzengleichung so:

$$\left(1 + \frac{\lambda + n(\mu + m + 1)}{l}\right) y_{l+n-1} - n\left(1 + \frac{\lambda + \mu + m + 1}{l}\right) z y_l + (n-1)\left(1 + \frac{\lambda}{l}\right) y_{l-1} = 0.$$

Die Koeffizienten haben jetzt für $l \to \pm\infty$ leicht angebbare Grenzwerte, und daher gilt nach dem Satz von Poincaré für jede Lösung y_l

$$\lim_{l \to +\infty} \frac{y_{l+1}}{y_l} = \mathsf{T},$$

wenn T eine geeignete Wurzel der Gleichung $t^n - nzt + n - 1 = 0$, d. h. $f(t, z) = 0$ ist, und man für z einen Wert z_0 nimmt, für den $\prod_{j,k} (|t_j| - |t_k|) \neq 0$. Ebenso ist $\lim_{l \to -\infty} \frac{y_{l-1}}{y_l} = \mathsf{T}'$, wo für T' die Gleichung gilt $1 - nz\, t^{n-1} + (n-1)\, t^n = 0$, d. h. $t^n f\left(\frac{1}{t}, z\right) = 0$, und

die gleiche Zusatzbedingung gelten soll. Wir stellen uns die Aufgabe, diejenigen Lösungen y_l anzugeben, für die der Poincarésche Quotient eine bestimmte unter den Wurzeln zum Grenzwert hat. Zu diesem Zweck bedienen wir uns *asymptotischer Darstellungen*, die im folgenden auch zu Reihenentwicklungen benützt werden sollen.

Es sei T eine beliebige Wurzel von $f(t, z) = 0$ und unter z ein fester Wert aus $\overline{\mathfrak{E}}$ (S. 80) verstanden. Wir setzen dann unter der Annahme $l > 0$

$$(1) \qquad Y_l = \int_{(0\mathsf{T}^+0)} \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m} d\tau .$$

Setzt man hier weiter

$$(2) \qquad \tau = u + \mathsf{T},\ \varphi(u) = 1 + \frac{u}{\mathsf{T}},\ \Phi(u) = \left(1 + \frac{u}{\mathsf{T}}\right)^{\lambda} \cdot f_1^{\mu+m}(\mathsf{T} + u, z),$$

wenn $f(\tau, z) = (\tau - \mathsf{T})\, f_1(\tau, z)$ ist so wird

$$(3) \qquad Y_l = \mathsf{T}^{\lambda+l} \int_{(-\mathsf{T}0^+-\mathsf{T})} u^{\mu+m}\, \Phi(u)\, \varphi^l(u)\, du .$$

Das Integral rechts hat die Form Perron 14., Glchg. (29), S. 202, wenn man die folgenden Bezeichnungsänderungen vornimmt, um zu der dortigen überzugehen:

$$\begin{array}{r|l} l & n \\ \mu + m & \alpha - 1 \\ \Phi & f \\ u & z \\ -\mathsf{T} & Z_1 \\ -\mathsf{T} & Z_2 . \end{array}$$

Wir haben zu prüfen, ob die übrigen dort gemachten Voraussetzungen erfüllt sind. (§ 3, S. 195 und § 4, S. 202 a. a. O.).

Es ist zunächst $\varphi(0) = 1$, $\lg \varphi(u) = \frac{u}{\mathsf{T}} - \frac{u^3}{3\,\mathsf{T}^3} + \cdots$, also $p = 1, b_0 = \frac{1}{\mathsf{T}}$ anzunehmen. Die Sektoren S_1, S_2 fallen zusammen in das Innere des Kreises $|\varphi(u)| = 1$ vom Radius $|\mathsf{T}|$. Dort ist offenbar $\varphi(u)$ regulär und $|\varphi(u)| < 1$. Führt man ferner (Fig. 5) den Integrationsweg von $-\mathsf{T}$ aus geradlinig bis in die Umgebung von $u = 0$, so ist auf ihm, abgesehen ev. vom Punkte $u = -\mathsf{T}$ selbst, auch $\Phi(u)$ regulär. Denn da im Inneren jedes der Sektoren $\mathfrak{S}_h$ der τ-Ebene (S. 79) für jeden Wert z nur eine Wurzel T liegt, kann auf einem Strahl $O\mathsf{T}$ der τ-Ebene keine weitere Wurzel gelegen sein, falls es sich nicht um einen Strahl $O\varepsilon_h$ handelt; ein solcher ist aber durch die Festsetzung z aus $\overline{\mathfrak{E}}$ ausgeschlossen. (Vgl. Fig. 1.) Für $\lambda = 0$ ist auch $u = -\mathsf{T}$ regulär, also alle Voraussetzungen erfüllt, und daher gibt Formel (39) (a. a. O. S. 206) bei Beschränkung auf das erste Glied (was für unseren Zweck ausreicht)[1]):

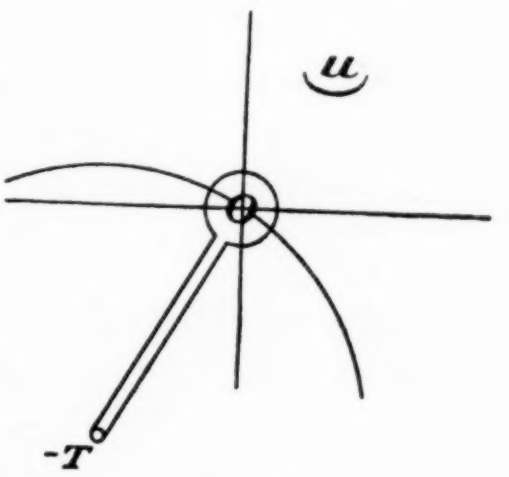

Fig. 5.

$$(4) \qquad \frac{Y_l}{\mathsf{T}^{\lambda+l}} = \left(\frac{\mathsf{T}}{l}\right)^{\mu+m+1} e^{-\pi i(\mu+m)} (1 - \mathsf{M})\, \Gamma(\mu + m + 1)\, f_\tau'^{\mu+m}(\mathsf{T}, z) + O\left(\frac{1}{l}\right)^{\Re(\mu)+m+2}_{(l\to+\infty)}$$

(Hier ist $f'_\tau(\mathsf{T}, z) = \Phi(0, z) = n \dfrac{\mathsf{T}}{\dfrac{d\mathsf{T}}{dz}}$, wie aus $\mathsf{T}^n - nz\,\mathsf{T} + n - 1 = 0$ sofort folgt.)

[1]) Wir denken entsprechend Abschn. II, § 1 $0 < \arc \mathsf{T} < 2\pi$ und $\arc(-\mathsf{T}) = -\pi + \arc \mathsf{T}$.

Die Gleichung (4) bleibt aber auch für $\lambda \neq 0$ richtig; wir brauchen nur τ_0 wie S. 80 und so zu wählen, daß überdies $-\mathsf{T}+\tau_0$ auf $-\mathsf{T}O$ liegt. Dann erweist sich $\int_0^{\tau_0} \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m}\, d\tau$ (dem wir also seine erste Form lassen), ohne weiteres als absolut

$$< |\tau_0|^{\Re(\lambda+l+1)} N = o\left(\frac{\mathsf{T}^{\Re(\lambda+l)}}{l^{\Re(\mu)+m+2}}\right),$$

so daß die Gleichung (4) gültig bleibt, da sie für $\int_{(-\mathsf{T}+\tau_0, 0^+, -\mathsf{T}+\tau_0)}$ wie soeben abgeleitet werden kann und das dann noch anzubringende Zusatzglied von geringerer Größenordnung ist als das Ordnungssymbol in (4), wenn man dort mit $\mathsf{T}^{\lambda+l}$ multipliziert.

Es sei ferner l *negativ* und $< -(nm + \Re(\lambda + n\mu) + 1)$ (vgl. S. 91). Dann können wir definieren

$$(5) \qquad Y_l = \int_{(\infty\, \mathsf{T}^+ \infty)} \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m}(\tau, z)\, d\tau.$$

Um jetzt eine entsprechende Überlegung anzustellen, haben wir zu transformieren $\tau \mid \frac{1}{\tau}$, so daß kommt[1])

$$(6) \qquad Y_l = -\int_{\left(0\left(\frac{1}{\mathsf{T}}\right)^+ 0\right)} \tau^{-(\lambda+l+n(\mu+m)+2)} (1 - nz\tau^{n-1} + (n-1)\tau^n)^{\mu+m}\, d\tau.$$

Jetzt ist eine analoge Behandlung möglich, wie für $l > 0$, und es ergibt sich

$$(7) \qquad \frac{Y_l}{\mathsf{T}^{\lambda+l+n(\mu+m)+2}} = \frac{-1}{(\mathsf{T}\,|l|)^{\mu+m+1}} e^{\pi i(\mu+m)} (1 - \mathsf{M})\, \Gamma(\mu+m+1)\, f_\tau'^{*\mu+m}\left(\frac{1}{\mathsf{T}}, z\right) + O\left(\frac{1}{|l|}\right)^{\Re(\mu)+m+2}_{(l\to-\infty)}.$$

Hierin ist $f^*(\tau, z) = \tau^n f\left(\frac{1}{\tau}, z\right)$ gesetzt, und daher $f_\tau^*\left(\frac{1}{\mathsf{T}}, z\right) = -\mathsf{T}^{-(n-2)} f_\tau'(\mathsf{T}, z)$, so daß man auch hier schreiben kann:

$$(8) \qquad \frac{Y_l}{\mathsf{T}^{\lambda+l}} = \left(\frac{\mathsf{T}}{l}\right)^{\mu+m+1} e^{-\pi i(\mu+m)} (1 - \mathsf{M})\, \Gamma(\mu+m+1)\, f_\tau'^{(\mu+m)}(\mathsf{T}, z) + O\left(\frac{1}{|l|}\right)^{\Re(\mu)+m+2}.$$

Setzt man

$$(9) \qquad \omega(z) = \mathsf{T}^{\lambda+\mu+m+1} e^{-\pi i(\mu+m)} (1 - \mathsf{M})\, \Gamma(\mu+m+1)\, f_\tau'(\mathsf{T}, z),$$

so gilt

$$(10) \qquad \lim_{l\to\pm\infty} \frac{Y_l\, l^{\mu+m+1}}{\mathsf{T}^l} = \omega(z);$$

man kann mit dem Zeichen für asymptotisch proportional auch schreiben

$$(11) \qquad Y_l \sim \frac{\mathsf{T}^l}{l^{\mu+m+1}}.$$

Wir hatten *bisher* z in $\overline{\mathfrak{E}}$ festgehalten. *Nunmehr* sei z in einem abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{B}$ von $\overline{\mathfrak{E}}$ *variabel*. Dann ist, wie wir zeigen wollen, die *Konvergenz* in (10) sogar *gleichmäßig*. In der Tat ist in $\mathfrak{B}$ $|\mathsf{T}| \geqq \alpha > 0$, α ist also untere Schranke für den

[1]) Bei richtiger Wertwahl der mehrdeutigen Potenzen.

Konvergenzradius von $\lg\varphi(u)$ und $\left(1+\frac{u}{\mathsf{T}}\right)^{\lambda}$; ferner ist $|\mathsf{T}-t_j| \geqq \beta > 0$ für alle Wurzeln $t_j \neq \mathsf{T}$, somit Min. (α, β) eine untere Schranke für den Konvergenzradius von $\Phi(u)$. Also gibt es für alle z in $\mathfrak{B}$ ein und dieselbe Zahl $\sigma > 0$, sowie wegen der Regularität und daher Beschränktheit der $\varphi(u)$ und $\Phi(u)$ für z in $\mathfrak{B}$, u auf dem Integrationsweg, auch ein und dieselbe positive Zahl M, so daß (17), (18) (a. a. O. S. 197) erfüllt sind. Ebenso ist dann C_k (a. a. O. S. 200) bzw. C_k' (S. 205) von z unabhängig, woraus die Behauptung erhellt.

Nach (9) ist in $\mathfrak{B}$ $|\omega(z)| \geqq \gamma > 0$. Es sei $0 < \varepsilon < \frac{\gamma}{2}$ angenommen. Dann ist nach dem soeben Bewiesenen für alle z aus $\mathfrak{B}$ gleichmäßig

$$\left|\frac{l^{\mu+m+1}Y_l}{\mathsf{T}^l} - \omega(z)\right| < \varepsilon \text{ für } |l| > l_0, \quad \text{also}$$

$$\left|\frac{l^{\mu+m+1}Y_l}{\mathsf{T}^l}\right| \geqq \gamma - \varepsilon > \frac{\gamma}{2} > 0. \tag{12}$$

Sonach hat Y_l für $|l| > l_0$ *in* $\mathfrak{B}$ *keine Nullstelle* mehr. Daher kann man den *Quotienten* bilden

$$\frac{Y_{l+1}}{Y_l}\,(l > 0) \text{ bzw. } \frac{Y_{l-1}}{Y_l}\,(l < 0) \text{ und findet aus (10) sofort}$$

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{Y_{l+1}}{Y_l} = \mathsf{T}, \quad \lim_{l\to-\infty}\frac{Y_{l-1}}{Y_l} = \mathsf{T}^{-1}. \tag{13}$$

Wir fassen zusammen in

Satz 16. *Für jeden festen Wert z aus $\bar{\mathfrak{E}}$ und eine beliebige Wurzel T von $f(t, z) = 0$ gilt für $l \to \pm\infty$ die asymptotische Abschätzung* (4) *bezw.* (8). *In einem abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B} \subset \bar{\mathfrak{E}}$ existiert gleichmäßig der lim* (10) *und der Poincarésche Quotientenlimes*

$$\lim_{l\to\pm\infty}\frac{Y_{l\pm1}}{Y_l} = \mathsf{T}^{\pm1}.$$

Sobald $|l|$ hinreichend groß ist, bilden die Y_l, die man erhält, wenn man T alle Wurzeln durchlaufen läßt, eine F. S. der Differenzengleichung. Das ist im allgemeinen Fall nach Satz 13 und (36), (37) S. 89 klar, folgt aber auch in den Ausnahmefällen aus Satz 14. Denn nach diesem Satze bilden sie ein F. S. der Differentialgleichung; und daraus folgt nach S. 88 (vgl. auch die Bemerkung S. 91, 2. am Ende), durchgeführt für den betreffenden l-Bereich, die Behauptung.

Um zur Behandlung der *allgemeinen* (in z regulären) *Lösung der Differenzengleichung* vorzudringen, seien jetzt $\mathsf{T}_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ die Wurzeln von $f(t, z) = 0$, nach wachsenden Beträgen geordnet, also

$$|\mathsf{T}_1| \leqq |\mathsf{T}_2| \leqq \cdots \leqq |\mathsf{T}_n|. \tag{14}$$

Diese T_j sind aber durchaus nicht in ganz $\bar{\mathfrak{E}}$ regulär, was daran liegt, daß die Definition auf den Strahlen $\varphi = \arg z = \frac{k\pi}{n}$ $(n = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ teilweise zweideutig ist. Setzt man z. B., aus dem Innern von $0 < \varphi < \frac{\pi}{n}$ kommend, T_3 über den Strahl $\varphi = \frac{\pi}{n}$ analytisch fort, so ist die Fortsetzung in $\frac{\pi}{n} < \varphi < \frac{2\pi}{n}$ gleich T_2. Einem Umlauf von z um 0 entspricht ein Umlauf der n Werte t_h (definiert wie S. 79) um die Punkte

$e^{\frac{\pi i}{n}}\ \varepsilon_{n-h}\sqrt[n]{n-1}$, wobei ein bestimmtes t_h der Reihe nach mit allen T_j zusammenfällt. (Vgl. K I S. 70, Fig. 1—5.)

Es sei daher angenommen, im *abgeschlossenen Bereich* $\mathfrak{B}'$ seien alle T_j *regulär* und überdies von jetzt an *alle Differenzen* $|\mathsf{T}_h| - |\mathsf{T}_j| \neq 0$. Das ist z. B. erfüllt, wenn $\mathfrak{B}'$ dem Innern von $0 < \varphi < \frac{\pi}{n}$ angehört. Dann ist dort auch

$$Y_{h,l} = \int_{(0\,\mathsf{T}_h^+\,0)} \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m} d\tau \quad \text{für } l > 0 \text{ bzw.} \qquad (|l| \text{ hinr. groß})$$
$$= \int_{(\infty\,\mathsf{T}_h^+\,\infty)} \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m} d\tau \quad \text{für } l < 0$$

regulär und ein F. S. Aus (11), (12), (14) folgt dann

$$(15) \qquad \frac{Y_{h,l}}{Y_{j,l}} \rightrightarrows 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } h < j, \quad l \to +\infty, \quad z\,(\,\mathfrak{B}' \\ \text{für } h > j, \quad l \to -\infty \end{array} \right\}.$$

(16) Es sei nun $y_l = \sum_1^n C_j(z) Y_{jl}$ eine *beliebige, in* $\mathfrak{B}'$ *reguläre Lösung von* $\Delta_l(v,z)=0$. Für irgendein festes $l = l_0$ ist die Determinante $|Y_{j,l_0+k}|_{\substack{j=1,\dots n \\ k=0\dots,n-1}}$ in $\mathfrak{B}'$ regulär, und da sie nicht identisch verschwindet, hat sie dort nur endlich viele Nullstellen. Folglich sind die durch die Matrizengleichung $(C_j(z)) = (Y_{j,l_0+k})^{-1}(y_{l_0+k})$ darstellbaren Koeffizienten $C_j(z)$ in $\mathfrak{B}'$ bis auf endlich viele Pole regulär. Jetzt sei $\mathfrak{B}'' \Subset \mathfrak{B}'$ ein abgeschlossener Bereich, in dem *alle* $C_j(z)$ *regulär* sind: überdies habe die letzte nicht identisch verschwindende Funktion $C_s(z)$ aus der Reihe $C_1(z), \dots, C_n(z)$ in $\mathfrak{B}''$ *überhaupt keine Nullstelle* mehr, so daß

$$(17) \qquad |C_s(z)| \geqq c > 0, \quad C_j(z) = 0 \quad \text{für } j = s+1, \dots, n. \quad \text{Sei dann } l > 0.$$

Wegen (16), (15), (17), (12) ist

$$|y_l| \geqq \frac{|C_s(z)|\,|Y_{sl}|}{2} > \eta_l > 0,$$

sobald l groß genug; d. h. auch y_l hat dann keine Nullstelle mehr in $\mathfrak{B}''$.

Hieraus folgt

$$(18) \qquad \frac{y_{l+1}}{y_l} = \frac{\sum_1^{s-1} \frac{C_j}{C_s} \frac{Y_{j,l+1}}{Y_{j,l}} \frac{Y_{jl}}{Y_{sl}} + \frac{Y_{s,l+1}}{Y_{s,l}}}{\sum_1^{s-1} \frac{C_j}{C_s} \frac{Y_{jl}}{Y_{sl}} + 1} \to \mathsf{T}_s \qquad \text{für } l \to \infty$$

wegen (13), (15), (16).

Entsprechend gilt natürlich

$$(19) \qquad \frac{y_{l-1}}{y_l} \to \mathsf{T}_q^{-1} \quad \text{für } l \to -\infty,$$

wenn $C_q(z)$ die erste nicht identisch verschwindende Funktion unter den $C_j(z)$ ist, und zwar in einem Bereich $\mathfrak{B}''' \Subset \mathfrak{B}'$, in dem $C_q(z)$ überhaupt nicht verschwindet.

Entsprechend den allgemeinen Sätzen[1]) erhält man je eine s- bzw. $(n-q+1)$-dimensionale Schar.

Für $s = 1$ kommt $C(z) \cdot \int_{(0\,\mathsf{T}_1^+\,0)} dv_{\lambda+l}$, für $q = n$ kommt $C(z) \cdot \int_{(\infty\,\mathsf{T}_n^+\,\infty)} dv_{\lambda+l}$ als ausgezeichnete Lösung.

[1]) Siehe *Perron*, Dieses Journal Bd. **136**, 1909, insbes. S. 26.

Damit hat man

Satz 17. *Beschränkt man sich auf einen Bereich, in dem alle* T_h *regulär, alle Differenzen* $|\mathsf{T}_h| - |\mathsf{T}_j| \neq 0$ *und ferner in der beliebigen, in z regulären Lösung* (16) *alle* $C_j(z)$ *regulär, und der* $\left\{\begin{matrix}erste\\letzte\end{matrix}\right\}$ *nicht identisch verschwindende Koeffizient* $\left\{\begin{matrix}C_q(z)\\C_s(z)\end{matrix}\right\}$ *keine Nullstelle besitzt, so gilt dort* $\lim\limits_{l\to\mp\infty}\dfrac{y_{l\mp1}}{y_l}=\left\{\begin{matrix}\mathsf{T}_q^{-1}\\\mathsf{T}_s\end{matrix}\right\}$. *Für jedes* $\left\{\begin{matrix}\mathsf{T}_q\\\mathsf{T}_s\end{matrix}\right\}$ *erhält man so eine* $\left\{\begin{matrix}n-q+1\\s\end{matrix}\right\}$ *dimensionale Lösungsschar.*

Als Vorbereitung zu den Anwendungen im nächsten Paragraphen behandeln wir noch die absolute kleinste Wurzel T_1 gesondert. Wir nehmen $\lambda = 0$ und zeigen, daß sich der Gültigkeitsbereich von (4) im jetzigen Fall wesentlich erweitern läßt. Es sei für $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$Y_{1l} = \int\limits_{(0\,\mathsf{T}_1^{+}\,0)} \tau^l f^{\mu+m}\,d\tau \text{ betrachtet.} \tag{20}$$

An Stelle von $\mathfrak{B}$ (S. 100) trete ein beliebiger abgeschlossener Bereich $\mathfrak{B}_1$ der z-Ebene, der die Punkte der n Strecken $z = \varrho\varepsilon_h$ $(h = 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqq \varrho \leqq 1)$ sämtlich außerhalb läßt [1]). In $\mathfrak{B}_1$ ist zunächst $\mathsf{T}_1(z)$ regulär (s. K I, insbes. (4) S. 69 und Fig. 1, 5). Ferner ist, wie die Substitution $\tau = \mathsf{T}_1 u$ zeigt,

$$Y_{1l} = \mathsf{T}_1^{l+1}\int\limits_{(0\,1^{+}\,0)} u^l(\mathsf{T}_1^n u^n - nz\,\mathsf{T}_1 u + n - 1)^{\mu+m}\,du$$

$$= \mathsf{T}_1^{l+1}\mathfrak{P}_l(\mathsf{T}_1) \quad \text{für} \quad |\mathsf{T}_1| < \sigma. \tag{20}_a$$

Da T_1 im Unendlichen von erster Ordnung verschwindet, hat Y_{1l} dort eine Nullstelle $(l+1)$-ter Ordnung. Y_{1l} ist also jedenfalls in $\mathfrak{B}_1$ regulär. Da nun wieder Ungleichungen der Form gelten

$$\begin{gathered}0 < \alpha \leqq |\mathsf{T}_1| \leqq \alpha',\\ |\mathsf{T}_1 - \mathsf{T}_j| \geqq \beta > 0 \quad \text{für} \quad j \neq 1 \text{ und ferner wegen}\\ |\mathsf{T}_1| < |\mathsf{T}_j|\end{gathered} \tag{21}$$

auf dem geradlinigen Weg $O\mathsf{T}_1$ niemals ein (von den Endpunkten verschiedener) singulärer Punkt T_j des Integranden liegen kann, so gilt in $\mathfrak{B}_1$ gleichmäßig mit der Bezeichnung (9)

$$\frac{Y_{1l}\,l^{\mu+m+1}}{\mathsf{T}_1^l} \rightrightarrows \omega_1(z) \quad \text{für} \quad l \to +\infty. \tag{22}$$

Endlich betrachten wir noch mit $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ das *Polynom* (vgl. S. 93 B)$_1$ und S. 95 C)$_2$

$$\Pi_l(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(0^{+})} \frac{f^{\mu+m}}{\tau^{l+1}}\,d\tau = \frac{-1}{(1-\mathsf{M}^{-n})}\,P_{-l-1}(z) \quad \text{(bzw.} \quad \bar{P}_{-l-1}(z).$$

Für z in $\mathfrak{B}_1$ liegt auf dem Rande des Konvergenzkreises der Entwicklung

$$f^{\mu+m}(\tau, z) = \sum_0^{\infty} \Pi_l(z)\,\tau^l$$

nur der einzige singuläre Punkt T_1.

Jetzt liefert Perron 13., § 2, letzte Gleichung nach einfacher Reduktion

---

[1]) D. h. also ein innerer Teilbereich von E_1 im Sinne von K I, S. 69.

$$2\pi i \Pi_l(z) = \frac{\mathsf{T}_1^{\mu+m-l}}{l^{\mu+m+1}} (1-\mathsf{M})\Gamma(\mu+m+1) f_\tau'^{\mu+m}(\mathsf{T}_1, z) + O(|\mathsf{T}_1|^{-l} l^{\Re(\mu)+m+2}),$$

und da auch hier die Abschätzungen in $\mathfrak{B}_1$ gleichmäßig gelten

$$\frac{\Pi_l(z) l^{\mu+m+1}}{\mathsf{T}_1^{-l-1}} \Rightarrow \text{const. } \omega_1(z). \tag{23}$$

§ 2. Reihenentwicklungen.

Wir setzen jetzt für $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$p_l(z) = \frac{1}{(n-1)^{\mu+m}} \Pi_l(z).$$

Schreibt man die Differenzengleichung in die veränderte Indexbezeichnung um, so wird sie

$$\begin{aligned}(l+1-n(\mu+m+1))\, p_{l-(n-1)}(z) - n(l-\mu-m)\, z\, p_l(z) \\ + (l+1)(n-1)\, p_{l+1}(z) = 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Hierin sind, der Herleitung durch Integration von II (Abschn. I, S. 73) entsprechend

$$p_{-1} = p_{-2} = \cdots - p_{-(n-1)} = 0 \tag{24'}$$

zu setzen. Weiter sei

$$\begin{aligned}\mu' &= 1-\mu \quad (\text{bzw. } \mu' = -\mu \quad \text{für } \Re(\mu) = 0) \quad \text{und} \\ m' &= -m \quad (\text{bzw. } m' = -m-1 \quad \text{für } \Re(\mu) = 0)\end{aligned} \tag{25}$$

angenommen. Wir bilden dann das der Klasse $K_{0\mu'}$ angehörige, der absolut kleinsten Wurzel $\mathsf{T}_1(\zeta)$ von $f(t,\zeta) = 0$ entsprechende Integral

$$q_l(\zeta) = \frac{1}{(1-\mathsf{M}')(n-1)^{\mu'+m'+1}} Y_{1l}^{(\mu'+'m)}.$$

Für die $q_l(\zeta)$ gilt die Differenzengleichung in der Form

$$\begin{aligned}(l+n(\mu'+m'+1))\, q_{l+n-1}(\zeta) - n(l+\mu'+m'+1)\zeta q_l(\zeta) \\ + l(n-1) q_{l-1}(\zeta) = 0 \qquad \text{für } l \geqq 1.\end{aligned} \tag{26}$$

Für $l = 0$ dagegen ergibt sich als nichthomogene Grenzform

$$n(\mu'+m'+1) q_{n-1}(\zeta) - n(\mu'+m'+1)\zeta q_0(\zeta) = -1. \tag{26'}$$

Die Formel (26') läßt sich entweder durch Integration von II S. 73 längs $(O\mathsf{T}_1^+O)$ gewinnen, wobei sich rechts, da es sich um einen hinsichtlich $K_{0\mu'}$ offenen Weg handelt, nicht Null ergibt, oder durch vorläufige Integration über die Doppelschleife $(\mathsf{T}_1^+ 0^+ \mathsf{T}_1^- 0^-)$ mit $\lambda \neq 0$ sowie nachherigen Grenzübergang $\lambda \to 0$. Dabei gilt für $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\Big\{&(\lambda + n(\mu'+m'+1)[(1-\Lambda)\int_{(\tau_0 \mathsf{T}_1^+ \tau_0)} dv_{\lambda+n-1} - (1-\mathsf{M}')\int_{(\tau_0 0^+ \tau_0)} dv_{\lambda+n-1}] \\ &- n(\lambda+\mu'+m'+1)\zeta[(1-\Lambda)\int_{(\tau_0 \mathsf{T}_1^+ \tau_0)} dv_\lambda - (1-\mathsf{M}')\int_{(\tau_0 0^+ \tau_0)} dv_\lambda]\Big\} \\ &+ (n-1)[(1-\Lambda)\int_{(\tau_0 \mathsf{T}_1^+ \tau_0)} dv_{\lambda-1} - (1-\mathsf{M}')\int_{(\tau_0 0^+ \tau_0)} dv_{\lambda-1}] = 0.\end{aligned}$$

Man lasse nun, was ohne Wertänderung geschehen kann, in den ersten vier Integralen τ_0 in den Nullpunkt übergehen, wodurch entsteht

$$\lambda + n(\mu' + m' + 1)\frac{1-\Lambda}{\lambda}\int\limits_{(0\,\mathsf{T}_1^+\,0)} dv_{\lambda+n-1} - n(\lambda' + \mu' + m' + 1)\,\zeta\frac{1-\Lambda}{\lambda}\int\limits_{(0\,\mathsf{T}_1^+\,0)} dv_\lambda$$
$$+ (n-1)\left[(1-\Lambda)\int\limits_{(\tau_0\,\mathsf{T}_1^+\,\tau_0)} dv_{\lambda-1} - (1-\mathsf{M}')\int\limits_{(\tau_0\,0^+\,\tau_0)} dv_{\lambda-1}\right] = 0.$$

Für $\lambda \to 0$ (bei festbleibendem τ_0) folgt hieraus Formel (26′), wenn man beachtet, daß

$$\int\limits_{(0^+)} dv_{-1} = 2\pi i(n-1)^{\mu'+m'}.$$

Multipliziert man jetzt (24) mit $q_l(\zeta)$, (26) bezw. (26′) mit $-p_l(z)$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$, so folgt durch Addition und Summenbildung wegen (25)

(27)
$$n(\zeta - z)\sum_0^L (l - \mu - m)p_l(z)\,q_l(\zeta)$$
$$+\sum_0^L (l - n + 1 - n(\mu + m))p_{l-n+1}(z)q_l(\zeta) - (l - n(\mu + m))\,p_l(z)q_{l+n-1}(\zeta)$$
$$+\sum_0^L (n-1)\,[(l+1)p_{l+1}(z)q_l(\zeta) - lp_l(z)q_{l-1}(\zeta)] = 1 \qquad (q_{-1}(\zeta) = 0).$$

Die letzte Summe ist

(28a)
$$(n-1)(L+1)p_{L+1}(z)q_L(\zeta);$$

die zweite wird mit Rücksicht auf (24′)

(28b)
$$-\sum_{L-n+2}^{L} (l - n(\mu + m))p_l(z)\,q_{l+n-1}(\zeta).$$

Wir werden zeigen, daß bei passenden Annahmen über den Variabilitätsbereich für z und ζ die beiden *Restglieder* (28 a), (28 b) *gleichmäßig nach Null gehen.*

(29) Es sei $0 < \varrho < r < 1.$

Dann sind $|\mathsf{T}_1(\zeta)| = \varrho$ und $|\mathsf{T}_1(z)| = r$ zwei singularitätenfreie Hypozykloiden, deren erste die zweite im Innern enthält. Ist $\varrho_0 > 0$ beliebig $< \varrho$, so ist $\varrho_0 \leqq |\mathsf{T}_1(\varrho)| \leqq \varrho$ als Bereich $\mathfrak{B}_1$ im Sinne von (22) brauchbar.

Für ζ in $\mathfrak{B}_1$ ist daher

(30)
$$|q_l(\zeta)| \leqq \frac{M|\mathsf{T}_1(\zeta)|^l}{l^{\Re(\mu)+m+1}} \leqq \frac{M\varrho^l}{l^{\Re(\mu)+m+1}},$$

wo $M > 0$ von ζ und l unabhängig.

Ist ferner $r < r' < 1$, so kann der Bereich $r \leqq |\mathsf{T}_1(z)| \leqq r'$ entsprechend für $p_l(z)$ gewählt werden, so daß nach (23)

(31)
$$|p_l(z)| \leqq \frac{N}{l^{\Re(\mu)+m+1}|\mathsf{T}_1(z)|^l} \leqq \frac{Nr^{-l}}{l^{\Re(\mu)+m+1}}.$$

Da $p_l(z)$ aber als Polynom im ganzen Innengebiet $|\mathsf{T}_1(z)| \geqq r$ regulär ist, muß diese Abschätzung nach dem Prinzip von Maximum dort überall gelten. Wegen der Regularität von $q_l(\zeta)$ in $\zeta = \infty$ (s. $(20)_a$ S. 103), kann aus entsprechendem Grunde auch $\varrho_0 = 0$ genommen werden.

Jetzt folgt aus (29), (30), (31) ohne weiteres, daß für

(31) $|\mathsf{T}_1(z)| \geqq r$ und $\varrho \geqq |\mathsf{T}_1(\zeta)| \geqq 0$

die Größen (28) gleichmäßig gegen Null gehen, und damit ist bewiesen

Satz 18. *Im abgeschlossenen Bereich* $\left\{\begin{matrix} 0 \leqq |\mathsf{T}_1(\zeta)| \leqq \varrho \\ r \leqq |\mathsf{T}_1(z)| \leqq 1 \end{matrix}\right\}$, *wo* $0 < \varrho < r < 1$, *konvergiert absolut und gleichmäßig in* z *und* ζ *die Bilinearreihe*

$$n \sum_0^\infty (l - \mu - m) p_l(z) q_l(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}.$$

Durch Verknüpfung mit der Cauchyschen Integralformel folgt jetzt in bekannter Weise, ohne daß wir das näher auszuführen brauchen.

Satz 19. *Ist* $F(z)$ *für* $|\mathsf{T}_1(z)| > R$ *regulär* $(0 \leqq R < 1)$, *so gilt dort eine Reihenentwicklung*

$$F(z) = \sum_0^\infty a_l p_l(z),$$

die absolut konvergiert und deren Koeffizienten eindeutig bestimmt sind als

$$a_l = \frac{n(l - \mu - m)}{2\pi i} \int_{(C)} F(\zeta) q_l(\zeta)\, d\zeta,$$

erstreckt über eine in $R < |\mathsf{T}_1| < 1$ *verlaufende,* $z = 0$ *im Innern lassende einfach geschlossene Kurve.*

Ist $F(z)$ *für* $|\mathsf{T}_1(z)| < R$ *regulär, so gilt dort eine absolut konvergente Reihenentwicklung*

$$F(z) = F(\infty) + \sum_0^\infty b_l q_l(z)$$

mit den Koeffizienten

$$b_l = \frac{n(l - \mu - m)}{2\pi i} \int_{(C)} (F(\zeta) - F(\infty) p_l(\zeta)\, d\zeta,$$

wo jetzt C *den Punkt* ∞ *positiv umschließt. Ähnlich für Entwicklungen in Hypozykloidenringen.*

Wir wollen nun zeigen, daß sich die Polynome $p_l(z)$ auf die von Faber 3. angegebene Methode der *Hadamardschen Transmutation* erzeugen lassen. Um das einzusehen, setzen wir in den Bezeichnungen von Krafft 8., S. 21, 24 ff.

$$\psi(\tau) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{\tau} + \tau^{n-1}\right), \quad \text{so daß}$$

$$-\tau \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} = \frac{(n-1)(1-\tau^n)}{n - 1 + \tau^{n-1}}, \quad \text{ferner}$$

$$f_2(x) = \frac{(1-x)^{\mu+m}}{(n-1)^{\mu+m}} = \frac{\sum_0^\infty \binom{\mu+m}{k} (-1)^k x^k}{(n-1)^{\mu+m}}, \quad \text{so daß}$$

$$f_1(x) = (n-1)^{\mu+m} \sum_0^\infty \frac{(-1)^k x^k}{\binom{\mu+m}{k}} \quad \text{wird, ferner} \tag{32}$$

$$\varphi_1(\tau) = (n-1)(1-\tau^n)(n-1+\tau^n)^{-(\mu+m+1)}$$

$$\varphi_2(\tau) = (n-1+\tau^n)^{\mu+m}$$

Alsdann wird nach (14) a. a. O. S. 30.

$$P_l(z) = \frac{(n-1)^{-(\mu+m)}}{2\pi i} \int_{(0^+)} \frac{(\tau^n - nz\tau + n - 1)^{\mu+m}}{\tau^{l+1}}, \quad \text{also}$$

$= p_l(z)$ in unserer Bezeichnung.

Da nun aber die $P_l(z)$ zugeordneten Funktionen eindeutig bestimmt sind, folgt für diese nach (16) a. a. O. und Satz 18

$$Q_l(z) = n(l - \mu - m)\, q_l(z).$$

Somit haben wir in unserem Falle für die zugeordneten Funktionen als Neues die Integraldarstellung (20) und die Differential- und Differenzengleichung, während in der allgemeinen Theorie nur die Darstellungen (15), (17), (27) a. a. O. zur Verfügung stehen. Die ersten beiden aber sind deswegen umständlich, weil die Hadamardsche Transmutierte $f_1(x)$ dort kompliziert auftritt, die ihrerseits nur durch die Reihe (32) gegeben ist.

Nunmehr erscheint die Entwicklung (20a) als Folge von Satz VI, S. 39/40 a. a. O. Ferner ist von der asymptotischen Beziehung (23) andeutungsweise schon bei Krafft S. 41 ff. und Faber S. 155 Gebrauch gemacht, dagegen nicht von (22). Es ist klar, daß für den einfachen Konvergenzbeweis von Satz 16 einfacher zu gewinnende reine Abschätzungen ausgereicht hätten; indes sind jene Darstellungen an sich von Interesse, und sie sind ferner nötig zur *Untersuchung von vorgelegten Reihen* der Form

$$\sum_0^\infty{}^{l} A_l\, p_l(z), \quad \sum_0^\infty{}^{l} A_l\, q_l(z).$$

Da die ersteren Reihen allgemein bei Faber und Krafft (an den soeben genannten Stellen) behandelt sind, beschränken wir uns auf eine Bemerkung betreffs der Reihen nach den $q_l(z)$. Es sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_0^\infty{}^{l} A_l x^l, \quad \text{d. h. also} \quad R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[l]{|A_l|}}, \quad \text{so daß}$$

$$|A_l| < \frac{1}{(R-\varepsilon)^l}, \quad \text{sobald } l > l_\varepsilon \text{ und}$$

$$|A_l| > \frac{1}{(R+\varepsilon)^l} \quad \text{für gewisse bel. große } l \text{ und jedes pos. } \varepsilon.$$

Es sei nun *erstens*

$$0 < R < 1.$$

Dann konvergiert die Reihe wegen (22) für jedes z mit $|\mathsf{T}_1(z)| < R$; denn dann ist für ε klein genug auch $|\mathsf{T}_1(z)| < R - \frac{\varepsilon}{2}$, also nach (22)

$$|A_l q_l(z)| < \frac{C}{l^{\Re(\mu)+m+1}} \left(\frac{R - \frac{\varepsilon}{2}}{R-\varepsilon}\right)^l.$$

Sie divergiert für $|\mathsf{T}_1(z)| < R$ und gleichzeitig z aus dem Innern von E_1 (siehe Anm. S. 103), da für ein solches z auch

$$|\mathsf{T}_1(z)| > R + 2\varepsilon \text{ und, weil (22) auch jetzt gilt,}$$

$$|A_l q_l(z)| > \frac{C'}{l^{\Re(\mu)+m+1}} \left(\frac{R+2\varepsilon}{R+\varepsilon}\right)^l \to \infty \quad \text{für gewisse bel. große } l.$$

Auf dem Rand $|\mathsf{T}_1(z)| = R$ liegt ein singulärer Punkt. Denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine Hypozykloide R' mit $1 > R' > R$, außerhalb der die Funktion regulär, also wegen Satz 19 nach den $q_l(z)$ entwickelbar wäre; die Entwicklungen müßten übereinstimmen, gegen die Divergenz der ersten Reihe für $|\mathsf{T}_1(z)| > R$.

Jetzt sei $\sqrt[n]{n-1} > R \geqq 1$. Die ersten beiden Schlüsse bleiben für $z \subset E_1$ und $|T_1(z)| < R$ nach (22) erhalten; für $R > 1$ konvergiert also dann die Reihe in einem von $|T_1(z)| = R$ nebst n geradlinigen Einschnitten begrenzten Bereich, und divergiert im Restgebiet der z-Ebene, ausgenommen die n Strecken $z = \varrho\varepsilon_h$, wo das Verhalten unbekannt bleibt. Auf einen singulären Punkt der Funktion auf dem Rand können wir mit unseren Mitteln nicht schließen. Für $R \geqq \sqrt[n]{n-1}$ konvergiert die Reihe in ganz E_1. Wir formulieren

Satz 20. *Eine Reihe* $\sum_0^\infty A_l q_l(z)$, *für die* $R = \dfrac{1}{\overline{\lim_l} \sqrt[l]{|A_l|}} < \sqrt[n]{n-1}$, *konvergiert bzw. divergiert in denjenigen Teilen von* E_1, *für die* $|T_1(z)| \lesseqgtr R$ *ist, und stellt im Konvergenzgebiet eine reguläre Funktion dar. Auf dem Rand des Konvergenzgebiets liegt entweder ein singulärer Punkt der Funktion, oder er enthält n geradlinige Stücke* $z = \sigma\varepsilon_h\ (0 < \sigma_0 \leqq \sigma \leqq 1)$. *Für* $R \geqq \sqrt[n]{n-1}$ *kann die Reihe höchstens auf den Strecken* $z = \sigma\varepsilon_k\ (0 \leqq \sigma \leqq 1)$ *divergieren.*

Anhang (Einordnung bekannter Sonderfälle).

1.) *Die Legendreschen Funktionen* [1]). $n = 2$, $\mu = \dfrac{1}{2}$, $m = -1$, für $\lambda = 0$ Ausnahmefall C). Üblicherweise legt man den Schnitt $0\ \infty$ in der τ-Ebene in die negativ reelle Achse; demgemäß sei für $z \subset \mathfrak{E}$ etwa $0 < \arc t_1 < \pi$; $-\pi < \arc t_2 < 0$.

Man *definiert* jetzt als Funktionen 1. und 2. Art für $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} 2\pi i\, P_{\lambda+l}(z) = \frac{1}{2} \underset{(t_1^+ t_2^+ t_1^- t_2^-)}{\int} dv_{\lambda+l} = \underset{(t_1^+)}{(\int} - \underset{(t_2^+)}{\int}) = \underset{(t_1^+ t_2^+)}{\int} = \dfrac{1}{1-\Lambda}(V_1 - V_2) \\ 2(1-\Lambda)\, Q_{\lambda+l}(z) = \underset{(t_1^+ 0^+ t_1^- 0^-)}{\int} dv_{\lambda+l} = (1-\Lambda) \underset{(t_1^+)}{\int} - 2 \underset{(0^+)}{\int} = V_1 \quad (M = -1!). \end{cases}$$

Die einfache Schleife $(t_1^+\ t_2^+)$ darf $-\infty\ 0$ nicht überschreiten. Die sonstigen Festsetzungen entsprechen denen von S. 80.

Als *Umlaufsmatrizen* erhält man nach den Methoden von II, § 1

an der Stelle $z = 1$	$z = -1$
$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi i & 1 \end{pmatrix}$	$A_1 = \begin{pmatrix} \Lambda & \dfrac{4\sin^2 \pi\lambda}{\pi i} \\ \pi i \Lambda & 2 - \Lambda \end{pmatrix}$.

P ist für $\left\{\begin{matrix} z = 1 \text{ regulär} \\ z = -1 \text{ logarithmisch} \end{matrix}\right\}$, Q ist logarithmisch für $z = \pm 1$.

Formel (7) S. 80 führt unter Benutzung der Transformation $\tau \mid \dfrac{1}{\tau}$ wegen der Symmetrie der Gleichung $f(t, z) = 0$ zu der *Schläflischen Relation*

$$Q_{\lambda+l}(z) - Q_{-\lambda-l-1}(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi\lambda\, P_{\lambda+l}(z) \quad \text{und zu}$$
$$P_{\lambda+l}(z) - P_{-\lambda-l-1}(z) = 0.$$

Diese Formeln liefern den Zusammenhang zwischen den Klassen

---

[1]) Siehe vor allem *Hobson* 3 und *Schläfli* 19.

$$K_{\lambda,\frac{1}{2}} \text{ und } K_{\lambda',\frac{1}{2}},\ \lambda+\lambda' = \left\{\begin{matrix}1 \text{ für } \Re(\lambda) \neq 0\\ 0 \text{ für } \Re(\lambda) = 0\end{matrix}\right\}.$$

Üblicher sind die Darstellungen durch *Integrale mit nur einem variablen Verzweigungspunkt.* Man erhält sie durch Uniformisierung der Quadratwurzel vermöge

$$\xi = \tau + \sqrt{f},\ \tau = \frac{\xi^2-1}{2(\xi-z)},\ \int \frac{\tau^{\lambda+l}}{\sqrt{f}}\,d\tau = \int \left(\frac{\xi^2-1}{2(\xi-z)}\right)^{\lambda+l}\frac{d\xi}{\xi-z}.$$

Wir wollen auf die *Abbildung der Wege* [1]) kurz eingehen.

Es sei $w^2 = z^2 - 1 \neq 0$. Wir setzen

$$\xi^* = \frac{\xi - z}{w} = D(\xi),$$

$$\tau^* = \frac{1}{2}\left(\xi^* + \frac{1}{\xi^*}\right) = S(\xi^*), \text{ dann folgt}$$

$$\tau = z + w\tau^* = D^{-1}(\tau^*), \text{ also schließlich}$$

$$\tau = D^{-1} S\, D(\xi).$$

Die geläufige Abbildung S wird also mittels der Drehstreckung D transformiert.

Es sei jetzt zunächst $\Re(z) > 0$. Die Gerade $\overline{t_1 t_2}$ in der t-Ebene trifft dann die negativ reelle Achse nicht (wegen $t_1 + t_2 = 2z, t_1 t_2 = 1$). Konstruieren wir demnach über der τ-Ebene die zweiblättrige Riemannsche Fläche R_τ der $\sqrt{f}$ mit dem geradlinigen Verzweigungsschnitt $t_1 t_2$, wobei jedes Blatt noch den Schnitt $-\infty\ 0$ tragen soll, so können $(t_1^+ t_2^+)$ und $(t_1^+ 0^+ t_1^- 0^-)$ auf R_τ gedeutet werden.

$(t_1^+ t_2^+)$ umschlingt in einem beliebigen Blatt den Verzweigungsschnitt; $(t_1^+ 0^+ t_1^- 0^-)$ kann aufgefaßt werden als $(\tau_0 0^+ \tau_0 0^- \tau_0)$ mit τ_0 etwa auf dem Schnitt, während 0^+ im 2., 0^- nach Überschreitung des Schnitts im 1. Blatt erfolgt.

R_τ geht nun in die durch den Kreis $|\xi - z| = |w|$ in zwei Fundamentalbereiche geteilte, schlichte ξ-Ebene über. Man hat z. B. $\left\{\begin{matrix}\tau = & 0; & \infty; & t_j\\ \xi = \pm 1; & z, & \infty; & t_j\end{matrix}\right\}$. Man hat wegen $\Re(z) > 0$ $|z-1| < |w|$, also liegt $\xi = 1$ in seinem Innern, und $(t_1^+ t_2^+)$ entspricht einem Umlauf $(z^+ 1^+)$, je nach Zweigsetzung im Innern oder Äußern von $|\xi - z| = |w|$, jedenfalls ohne Überschreiten des Schnitts $\infty - 1$. Die Doppelschleife geht in eine Schleife $(-1)^+ 1^-$ vom Lemniskatentyp über.

Jetzt sieht man leicht, was für beliebiges z erfolgt: Man lege in der ξ-Ebene zwei Schnitte $-1\ \infty$, $+1\ z$, die sich nicht überkreuzen. Die Schleifen $(z^+ 1^+)$ bzw. $(-1)^+ 1^-$ sind dann wieder wohlbestimmt. $t_1\, t_2$ sowie das Bild des Verzweigungsschnitts spielen in der ξ-Ebene keine ausgezeichnete Rolle mehr.

Aus den allgemeinen Wegformen kann man speziell zu *offenen* übergehen; man hat

$$P_{\lambda+l} = \frac{1}{\pi i}\int_{t_2}^{t_1} dv_{\lambda+l} = \frac{1}{\pi i}\int_{t_2}^{t_1}\left(\frac{\xi^2-1}{2(\xi-z)}\right)^{\lambda+l}\frac{d\xi}{\xi-z}.$$

Für $l \geqq 0$ erhält man ferner

$$Q_{\lambda+l} = \int_0^{t_1} dv_{\lambda+l} = \int_{t_2}^{\infty} dv_{-\lambda-l-1} = \int_1^{t_1} \cdots d\xi = \int_{t_1}^{-1} \cdots d\xi.$$

Es ist wohl auch üblich, die beiden letzten Ausdrücke, die durch $\xi'^* = \frac{1}{\xi^*}$ ineinander übergehen, zusammenzunehmen, wodurch man die *ganz spezielle* Form erhält

[1]) Auf die Zweigfixierung in den verschiedenen Ebenen gehen wir der Kürze halber nicht ein.

$$Q_{\lambda+l} = \frac{1}{2^{\lambda+l+1}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\xi^2)^{\lambda+l}}{(z-\xi)^{\lambda+l+1}} d\xi .$$

$l < 0$ ist durch die Schläflische Relation inbegriffen.

Bildet man für $\Re(z) > 0$ das System der Kreise $|\xi - z| =$ konst. auf parallele Strecken ab, etwa vermöge

$\xi = \tau + we^{i\varphi}$, so ergibt sich die Heinesche, ebenfalls wenig zentrale Definition

$$P_{\lambda+l}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (z + w\cos\varphi)^{\lambda+l} d\varphi .$$

Im Falle $\lambda = 0$ ergibt sich durch einfache Wegumformung

$$2\pi i P_l(z) = \int_{(0^+)} \frac{\tau^{-l-1}}{\sqrt{f}} d\tau = \int_{(\infty^+)} \frac{\tau^l}{\sqrt{f}} d\tau = 2\pi i P_{-l-1}(z) \qquad (l \geqq 0)$$

$$Q_l(z) = \int_0^{t_1} dv_l = \int_{t_2}^{\infty} dv_{-l-1} = \int_1^{t_1} \cdots d\xi = -\int_{-1}^{t_1} \cdots d\xi = \frac{1}{2^{l+1}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\xi^2)^l}{(z-\xi)^{l+1}} d\xi$$

$(l \geqq 0)$.

Der Integrationsweg für $Q_l(z)$ ist nicht mehr geschlossen [1]). Dies gibt Veranlassung zu der Grenzform der Differenzengleichung

$$Q_1(z) - z\,Q_0(z) = -1.$$

Für $l < 0$ setzt man jetzt

$$Q_l(z) = \int_{t_2}^{\infty} dv_{+l} = Q_{-l-1}(z).$$

Doch ist dies eine neue Definition und *nicht* etwa $\lim Q_{l+\lambda} = Q_l$, da dieser Grenzwert nach der Schläflischen Relation nicht existiert. [2]) Man hat vielmehr eine für die Ausnahmefälle typische andere Wegwahl. (Vgl. auch Satz 14, S. 94); hier ist $nm + g + 1 = 0$; 3.) tritt also nicht auf). $Q_l(z)$ ist jetzt in der längs $-1 \cdots +1$ geschlitzten z-Ebene E_1 regulär und dort gleich $\int_0^{T_1} dv_l$, wo $|T_1(z)| < |T_2(z)|$. Es ist $T_1 = t_1$ für $\Re\left(\frac{z}{i}\right) < 0$, während die Werte von $Q_l(z)$ in der unteren Hälfte von E_1, wenn man von $\overline{\mathfrak{E}}$ ausginge, über einem 2. Blatt lägen.

Wir bemerken noch, daß sich der *Konvergenzbeweis* für die *Bilinearreihe* hier ganz unmittelbar erbringen läßt; es sind weder asymptotische Abschätzungen noch Laplacesche Integrale vonnöten [3]).

Setzt man nämlich mit $l \geqq 0$ in

$$Q_l(\zeta) = \int_0^{T_1(\zeta)} \frac{\tau^l}{\sqrt{f}} d\tau \qquad \tau = T_1(\zeta)u, \text{ so wird}$$

$$Q_l(\zeta) = T_1^{l+1}(\zeta) \int_0^1 \frac{u^l\,du}{\sqrt{(1-u)\,(1-T_1^2 u)}}, \quad \text{also für}$$

---

[1]) Insofern ist die Bemerkung betreffs einheitliche Definition durch geschlossene Wege bei Whittaker-Watson 22., S. 318, 15. 32 einzuschränken. Vgl. auch Abschn. II, § 3 dieser Arbeit, bes. S. 90.

[2]) Vgl. *Schläfli* 19., S. 14 o.

[3]) Diese sind a. a. O. S. 321, 15. 4 herangezogen. Man beachte die dazu nötigen rechnerischen Vorbereitungen!

$$|\mathsf{T}_1(\zeta)| \leqq \varrho < 1$$

$$|1 - \mathsf{T}_1^2(\zeta)\, u| \geqq 1 - \varrho^2 u \quad \text{und also}$$

I. $$|Q_l(\zeta)| \leqq |\mathsf{T}_1^{l+1}(\zeta)| \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u)\,(1-\varrho^2 u)}} \leqq M_\varrho\, \varrho^{l+1}.$$

Ähnlich wird aus

$P_l(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathsf{T}_2}^{\mathsf{T}_1} \frac{\tau^l\, d\tau}{\sqrt{f}}$ (wo der Integrationsweg wegen $\lambda = 0$ geradlinig angenommen werden darf und die $\sqrt{}$ passend fixiert ist) mittels

$$\tau = \mathsf{T}_1 + (\mathsf{T}_2 - \mathsf{T}_1)\, u \qquad (z^2 - 1 \neq 0)$$

$$P_l(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{(\mathsf{T}_2 u + \mathsf{T}_1 (1-u))^l}{\sqrt{u(1-u)}}\, du, \quad \text{also}$$

II. $$|P_l(z)| \leqq \frac{1}{\pi} |T_1(z)|^{-l} \int_0^1 \frac{(u + |\mathsf{T}_1|^2\,(1-u))^l}{\sqrt{u(1-u)}}\, du \leqq \frac{1}{\pi}\, r^{-l} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = r^{-l}$$

für $r \leqq |T_1(z)| < 1$. Die Abschätzung muß von selbst auch für $|\mathsf{T}_1(z)| = 1$ gelten, und nunmehr ist unter der Annahme $\varrho < r$ die Restbetrachtung (28) S. 105 sofort erledigt.

2.) *Die Gegenbauer-Nielsenschen Funktionen* $n = 2$, μ, m bel.

Wir geben hier nur den Übergang zu den Nielsenschen Bezeichnungen an. Schreibt man unsere Formeln II und UI (Abschn. I, S. 73, 75) für Integrale statt für Differentiale, setzt man ferner

$$\lambda + l = -\varrho - 1$$

$$\mu + m = -\nu \quad \text{und bezeichnet}$$

$v_{-\varrho-1}^{(-\nu)}$ mit $K^{\nu,\varrho}$, so erhält man die Nielsenschen Definitionsformeln S. 55, (1), (2) seines Werkes 8. Dort treten keine Doppelschleifenintegrale auf; man hat sie in der Tat nicht nötig, da für $n = 2$ die Differentialgleichung bis auf einfache Transformation eine hypergeometrische wird, deren Theorie man in fertigen Formeln beherrscht. Im allgemeinen Fall kann man nicht so vorgehen; hier scheint der einzig bisher behandelte zu sein

3.) *Der Pincherlesche Fall.* $\lambda = 0$, $\mu = \frac{1}{2}$, $n = 3$, $m = -1$.

Pincherle geht von den durch $\frac{1}{\sqrt{f}}$ erzeugten Polynomen aus, gelangt zur Differenzengleichung, für die er ein F. S. aus Polynomen in z bestimmt, sowie zu einer Differentialgleichung 3. Ordnung (57) a. a. O. für die erste Polynomserie und (58) für die zugeordneten Funktionen. Die zweite und dritte Polynomreihe genügt aber nicht (57); ein F. S. für (57) wird von Pincherle *nicht* aufgestellt. Bei uns dagegen wird ein und dasselbe F. S. für $D_z = 0$ und $\Delta_l = 0$ aus bestimmten Integralen gebildet (siehe B) S. 93).

Wir wollen den Übergang zu den Pincherleschen Formeln herstellen. Wir setzen

(1) $$z = \sqrt[3]{4}\, x, \quad \tau = \sqrt[3]{2}\, t \quad \text{und erhalten}$$

(2) $$\int \tau^l (\tau^3 - 3z\tau + 2)^{-\frac{1}{2}}\, d\tau = \frac{\sqrt[3]{2}^{l+1}}{\sqrt{2}} \int t^l (t^3 - 3xt + 1)^{-\frac{1}{2}}\, dt.$$

Die Differentialgleichung wird nach IV, S. 78.

$$D_z(v;l) = 16\,(z^3-1)\,v''' + 96\,z^2v'' + (103 - 12\,l^2)\,zv' + (2l-7)\,(2l-1)(l+1)\,v = 0.$$

Mittels (1), (2) erhält man in Pincherlescher Schreibweise

$$\overline{D}_x(v;l) = 4(4x^3-1)\,v''' + 96\,x^2v'' + (103 - 28\,l^2)\,xv' + (2l-7)\,(2l-1)\,(l+1)\,v = 0.$$

Diese Gleichung hat anstelle von (58) a. a. O. zu treten. Sie gilt übrigens für *alle* Werte von l und ist von uns in B) S. 94 *vollständig* integriert[1]). Ersetzt man in $\overline{D}_x(v;l)$ l durch $-l-1$, so ergibt sich Gleichung (57) a. a. O., die u. a. die in der jetzigen Indexbezeichnung für $l \geqq 0$ entstehenden Polynome zu Lösungen hat. (58) a. a. O. steht zu (57) nicht in dieser Beziehung, wie es doch nach unserer Theorie sein müßte (vgl. oben S. 90, 2. sowie *Goursat* 4., S. 41 o.). Das beruht auf einem Versehen in der Herleitung der Formel (54) die unserer Formel II′ S. 76 entspricht. Vgl. hierzu auch Herm. Schmidt, 21., S. 155/156[2]).

[1]) Für $l < 0$ *kann* man zu offenen Integralen $t_j\,\infty$ übergehen, wenn man will. Für $l \geqq 0$ muß *ein* offener Integrationsweg herangezogen werden. Siehe auch S. 98, (57) ff.

[2]) Die Gleichung (1) a. a. O. S. 155 entspricht unserer Beziehung II′ (S. 76), und aus (1) und (2) läßt sich s_0' linear kombinieren. Damit ist auch die Behauptung betr. die Differentialgleichung (a. a. O. S. 156) mit der Herleitung von IV aus II′, s_λ' bewiesen.

Eingegangen 8. Februar 1929.

Schriftenverzeichnis.

1. *Broecker, Hermann*, Die Periodizitätsmoduln der Abelschen Integrale 1. Gattung als Funktionen eines Parameters usw. Diss. Berlin 1893.
2. *Darboux, G.*, Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe très étendue de développements en série. Journal de Math. (3) **4**, 1878.
3. *Faber, G.*, Über polynomische Entwicklungen II. Math. Ann. **64**, 1907.
4. *Goursat, E.*, Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies. Acta Math. **2**, 1883.
5. *Hobson*, On a Type of Spherical Harmonics of Unrestricted Degree, Order and Argument. Phil. Trans. London. **187** A, 1896.
6. *Jordan, C.*, Cours d'Analyse III, 1896, S. 240 ff.
7. *König, R.*, Über Polynomsysteme, welche aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen I. Dieses Journal **159**, 1928. (Zitiert K I.)
8. *Krafft, M.*, Zur Theorie der Faberschen Polynome und ihrer zugeordneten Funktionen. Diss. Marburg 1915.
9. *Nekrassoff, P. A.*, Über lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integriert werden. Math. Ann. **38**, 1891.
10. *Nielsen, N.*, Théorie des fonctions métasphériques. Paris 1911.
11. *Nörlund, N. E.*, Vorlesungen über Differenzenrechnung. Berlin 1924.
12. *Perron, O.*, Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten. Math. Ann. **70**, 1911.
13. *Perron, O.*, Über das Verhalten von $f^{(\nu)}(x)$ für $\lim \nu = \infty$, wenn $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt. Münchener Ber. 1913, S. 355—382.
14. *Perron, O.*, Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen. Münchener Ber. 1917, S. 191—219.

15. *Philipps, J.*, Über die konforme Abbildung durch Rollkurven begrenzter Gebiete. Diss. Marburg 1919.

16. *Pincherle, S.*, Una nuova estensione delle funzioni sferiche. Memorie della R. acc. delle scienze dell' ist. di Bologna (5) **1**, 1890.

17. *Pochhammer, L.*, Über ein Integral mit doppeltem Umlauf. Math. Ann. **35**, 1889 (und anschließende Arbeiten).

18. *Poincaré, H.*, Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. Americ. Journ. of math. **7**, 1885.

19. *Schläfli*, Über die zwei Heineschen Kugelfunktionen und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale, Bern 1882.

20. *Schlesinger, L.*, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, 1897, insbes. Bd. II, 1, Abschn. XII.

21. *Schmidt, Herm.*, Zur Differentiation uneigentlicher Integrale nach einem Parameter. Münchener Ber. 1928, S. 151—156.

22. *Whittaker, E. T.* und *Watson, G. N.*, A course of Modern Analysis. Cambridge 1920.

Ein Satz über die eindeutigen Bewegungen Clifford-Kleinscher Flächen in sich*).

Von *Frank Löbell* in Stuttgart.

Von H. A. Schwarz stammt der Satz, daß eine geschlossene Riemannsche Fläche, deren Geschlecht größer als eins ist, nur eine endliche Anzahl eindeutiger konformer Abbildungen auf sich gestattet [1]). Weiter ist bekannt, daß sich auf jeder Riemannschen Fläche die ihr einprägte, überall reguläre Winkelmaßbestimmung zu einer nirgends singulären Längenmaßbestimmung konstanten Krümmungsmaßes ergänzen läßt; dadurch wird die Riemannsche Fläche zu einer zweiseitigen Clifford-Kleinschen Fläche, und umgekehrt ist jede derartige Fläche auch eine Riemannsche Fläche [2]). Jede Bewegung der Clifford-Kleinschen Fläche in sich ist aber eine konforme Abbildung der Riemannschen Fläche auf sich. Demnach besagt der oben angeführte Satz, daß es *in einer geschlossenen zweiseitigen Clifford-Kleinschen Fläche vom Geschlecht* $p > 1$ *nur eine endliche Anzahl eindeutiger Bewegungen* geben kann.

In der vorliegenden kleinen Arbeit soll gezeigt werden, daß dieser Satz einen viel größeren Geltungsbereich besitzt: er wird *für alle Clifford-Kleinschen Flächen, deren Eulersche Charakteristik positiv und endlich ist*, bewiesen werden, mögen sie geschlossen oder offen, orientierbar oder nicht-orientierbar sein, mögen sie zu den Killingschen oder zu den Nicht-Killingschen Flächen [3]) gehören. Für eine Clifford-Kleinsche Fläche mit unendlicher Charakteristik [4]) braucht dagegen der Satz nicht erfüllt zu sein.

Der Beweis beruht auf einer Eigenschaft der Längen der geschlossenen geodätischen Linien einer Clifford-Kleinschen Fläche mit endlicher positiver Charakteristik, die zunächst abgeleitet werden soll. Zum Schluß wird das allgemeine Ergebnis an einem ganz einfachen Beispiel einer derartigen Fläche veranschaulicht werden, wobei sich noch einige weitere merkwürdige Eigenschaften an dieser zeigen.

Wie schon bei einer anderen Gelegenheit [5]) wollen wir im folgenden *die Clifford-Kleinschen Flächen* zur Abkürzung als „*C-K-Flächen*“ und *die geodätischen Linien* in ihnen als „*Geraden*“ bezeichnen.

---

*) Aus der am 13. II. 1928 bei der Technischen Hochschule Stuttgart eingereichten Habilitationsschrift des Verfassers.

[1]) *H. A. Schwarz*, Über diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Größen, welche eine Schar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen, Journal f. d. reine u. angew. Math. **87** (1879), S. 139 ff.

[2]) Vergl. *Koebe*, Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nicht-euklidische Geometrie, Annali di matematica, Ser. III, **21** (1913), p. 57 ff. *Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig und Berlin 1923, S. 153. *Koebe*, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nicht-euklidische Raumformen, I. Mitteilung, Sitz.-ber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.- Math. Klasse, Jahrgang 1927, S. 164 ff.

[3]) Siehe *H. Hopf*, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math. Ann. **95** (1926), S. 315 f. Vergl. auch die in Fußnote [6]) angegebene Dissertation, S. 92 f., Anm. [26]).

[4]) Vergl. die in Fußnote [6]) angeführte Dissertation, S. 84 u. S. 98, Anm. [123]).

[5]) *Löbell*, Über die geodätischen Linien der Clifford-Kleinschen Flächen, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 572 ff.

1. Unbeschränkheit der Längen jeder unendlichen Menge von geschlossenen Geraden einer C-K-Fläche mit endlicher positiver Charakteristik.

Die geschlossenen Geraden der C-K-Flächen sind Gebilde, die sich durch viele, wohl erst zum kleinen Teil bekannte, interessante Eigenschaften auszeichnen [6]). Wir beweisen über sie hier zunächst den Satz:

In einer C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ mit endlicher positiver Charakteristik c gibt es nur eine endliche Anzahl von geschlossenen Geraden, deren Längen kleiner als eine gegebene Strecke d sind.

Oder, anders ausgedrückt:

Die Längen der geschlossenen Geraden einer C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ mit endlicher positiver Charakteristik c können keinen endlichen Häufungswert besitzen.

Wir fassen eine Abwicklung [7]) der Fläche $\mathfrak{E}$ auf ihre Urfläche [8]) $\mathfrak{E}^0$ und ein bestimmtes Bild $\mathfrak{B}^0$ des Binnenteils [9]) $\mathfrak{B}$ der Fläche $\mathfrak{E}$ ins Auge (Fig. 1); die Fläche hat einen Binnenteil, weil wir die Charakteristik c als positiv annehmen. Sie werde zunächst als eine Nicht-Killingsche Fläche gedacht. Weil außerdem hier c als endlich vorausgesetzt wird, läßt sich $\mathfrak{B}^0$ so wählen, daß es im Innern eines Kreises k^0 von endlichem Radius b liegt; der Mittelpunkt von k^0 sei $\mathfrak{m}^0$. Da alle geschlossenen Geraden g von $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{B}$ angehören, so entspricht jeder geschlossenen Geraden vermöge dieser Abwicklung wenigstens ein Bild g^0, das einen Punkt mit $\mathfrak{B}^0$ gemein hat, folglich durch einen Punkt im Innern von k^0 läuft. Es seien nun mit g' die geschlossenen Geraden bezeichnet, deren Länge $< d$ ist, und mit g'^0 diejenigen unter deren Bildern, die einen Punkt mit $\mathfrak{B}^0$ gemein haben. Dann gibt es zu jeder der Geraden g'^0 eine Deckbewegung [10]) von $\mathfrak{E}$, die diese Gerade als Achse [11]) besitzt, und deren Schiebungsgröße $< d$ ist; diese Bewegung bringt also jeden Punkt von g'^0, der im Innern von k^0 liegt, in eine Lage innerhalb des Kreises um $\mathfrak{m}^0$ mit dem Radius $b + d$, folglich bringt sie $\mathfrak{B}^0$ mit einem Bild $\mathfrak{B}'^0$ von $\mathfrak{B}$ zur Deckung, das ganz innerhalb des Kreises k'^0 um $\mathfrak{m}^0$ mit dem Radius $d + 3b$ liegt. Da aber zwei verschiedenen Geraden in $\mathfrak{E}$ nie zwei zusammenfallende Bildgeraden in $\mathfrak{E}^0$ entsprechen können, folglich auch die Bilder von $\mathfrak{B}$, in die $\mathfrak{B}^0$ durch zwei Deckbewegungen übergeführt wird, deren Achsen Bilder verschiedener geschlossener Geraden in $\mathfrak{E}$ sind, immer verschieden sein müssen, so folgt: Es gibt höchstens ebenso viele geschlossene Geraden mit einer Länge, die kleiner als d ist, wie Bilder von $\mathfrak{B}$ in

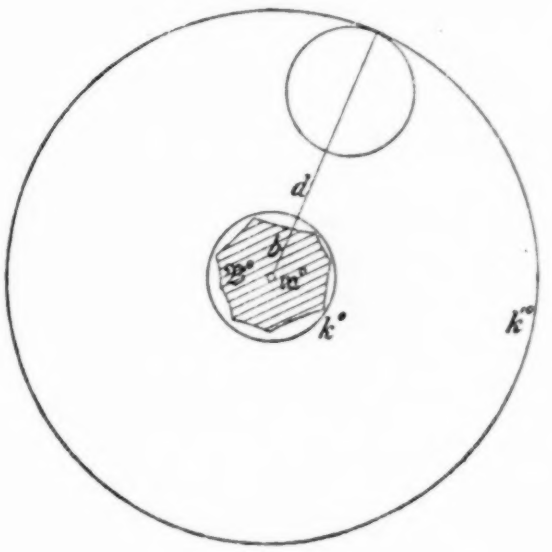

Fig. 1.

---

[6]) Vergl. *Löbell,* Die überall regulären unbegrenzten Flächen fester Krümmung, Dissertation Tübingen 1927 (weiterhin als „Diss." zitiert) und die in Anmerkung [5]) angegebene Arbeit, sowie die in diesen beiden Arbeiten angeführte Literatur. Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen erschien noch: *Nielsen,* Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen II, Acta math. **53** (1929), S. 1—76. *Koebe,* Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, IV. Mitteilung, Sitz.-ber. d. Preuß. Ak. d. Wiss., Phys.-math. Klasse, Jahrgang 1929, S. 414—457.

[7]) Siehe Diss. S. 17 ff.

[8]) $\mathfrak{E}^0$ ist die universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{E}$, hier also immer die hyperbolische Ebene. Vergl. Diss. S. 12 f.

[9]) Diss. S. 72 ff.

[10]) Diss. S. 25 ff.

[11]) Diss. S. 30 ff.

dem Kreis k'^0. Da sich zwei verschiedene Bilder von $\mathfrak{B}$ nicht teilweise überdecken können, so ist damit der Satz bewiesen [12]).

Setzen wir das Krümmungsmaß von $\mathfrak{E}^0$ als -1 voraus, so ergibt sich hieraus, da jeder Kreis vom Radius r den Flächeninhalt [13]) $2\pi(\mathfrak{Cof}\, r - 1)$ und der Binnenteil $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{E}$ die Fläche [14]) $2\pi c$ hat, für die Anzahl $n(d)$ der geschlossenen Geraden, deren Länge $< d$ (man dürfte sogar festsetzen: $\leqq d$) ist, die Abschätzung: $n(d) < \dfrac{\mathfrak{Cof}\,(d + 3b) - 1}{c}$; dieser Ausdruck wird aber erst brauchbar, wenn man die Länge b bestimmt hat, und dies scheint allgemein nicht möglich zu sein.

Es sei noch einmal ausdrücklich bemerkt, daß der Beweis auf der Endlichkeit der Charakteristik c beruht; wenn c unendlich ist, so reicht nämlich jedes Bild des Binnenteils an den absoluten Kegelschnitt u^0 heran. In der Tat kann man leicht Beispiele von Flächen $\mathfrak{E}$ negativer Krümmung mit unendlicher Charakteristik [15]) angeben, die unendlich viele geschlossene Geraden gleicher Länge haben: Setzen wir etwa an ein Doppelsechseck [16])

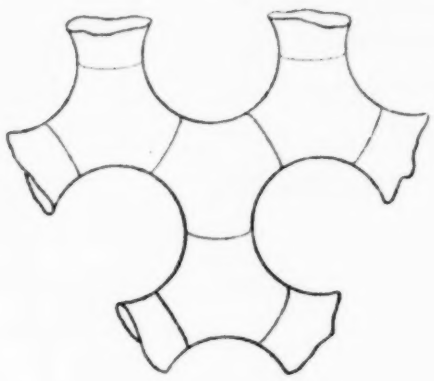

Fig. 2.

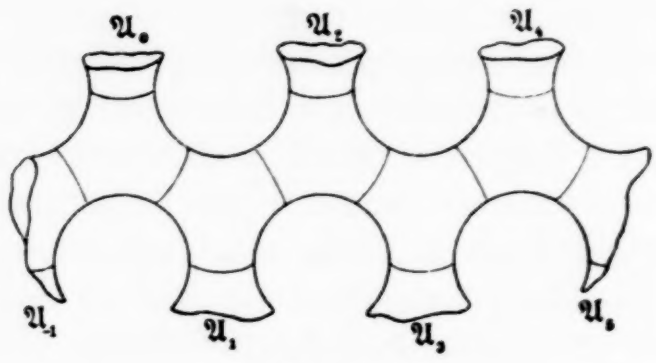

Fig. 3.

mit drei gleichen Randgeraden von der Länge d drei weitere ihnen kongruente Doppelsechsecke (Fig. 2), an das so entstandene Flächenstück mit 6 Randgeraden von der Länge d 6 weitere Doppelsechsecke, die dem ersten kongruent sind, usw. an, so entsteht eine Fläche $\mathfrak{E}$ mit unendlich vielen Rückkehrgeraden [17]) von der Länge d. (Eine andere solche Fläche wäre die in der Figur 3 dargestellte, deren Bildungsgesetz zur Genüge aus dieser Figur selbst hervorgeht.)

Auch für die sogenannten Nicht-Killingschen [18]) Flächen $\mathfrak{E}$ ist der Beweis nicht stichhaltig, weil der Binnenteil einer solchen nur Bilder besitzt, die an den absoluten Kegelschnitt heranreichen; er läßt sich jedoch so abändern, daß er auch für diese Flächen gültig wird. Man kann nämlich, wenn c endlich ist, den Binnenteil $\mathfrak{B}$ stets in ein geradliniges Polygon $\mathfrak{B}^0$ abwickeln, das eine endliche Anzahl von Ecken auf u^0 besitzt, sonst aber ganz in $\mathfrak{E}^0$ liegt. An eine solche Ecke $\mathfrak{u}^0$ reicht das Polygon mit 2 Seiten s_1^0 und s_2^0 heran (Fig. 4), die einander vermöge einer zur Gruppe Γ der Deckbewegungen von $\mathfrak{E}$ gehörigen Drehung um den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{u}^0$ entsprechen. Ist $\mathfrak{e}^0{}_1$ der von $\mathfrak{u}^0$ verschiedene Eckpunkt auf der Seite s_1^0, $\mathfrak{e}_2^0$ der von $\mathfrak{u}^0$ verschiedene Eckpunkt auf s_2^0,

---

[12]) Vergl. zu diesem Beweis *Gieseking*, Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen, Diss. Münster 1912, S. 77 f.

[13]) Siehe etwa *Liebmann*, Nichteuklidische Geometrie, Berlin und Leipzig 1912, S. 95.

[14]) Siehe Diss. S. 84 f.

[15]) Siehe Fußnote [4]).

[16]) Diss. S. 66 ff.

[17]) Eine Rückkehrgerade ist eine geschlossene Grade ohne mehrfache Punkte. Vergl. Diss. S. 55.

[18]) Siehe Fußnote [3]).

so geht auch e_2^0 aus e_1^0 durch diese Bewegung von Γ hervor. Wir zeichnen nun den Grenzkreis l^0 durch e_1^0, der u^0 als Zentrum besitzt, also auch durch e_2^0 geht. Schneiden wir die Fläche $\mathfrak{F}$ längs der Spur von l^0 auf, so fällt nach dem Gesagten ein Teil von $\mathfrak{F}$ ab, den wir auch dadurch herstellen können, daß wir das Gebiet von $\mathfrak{F}^0$, das innerhalb s_1^0,

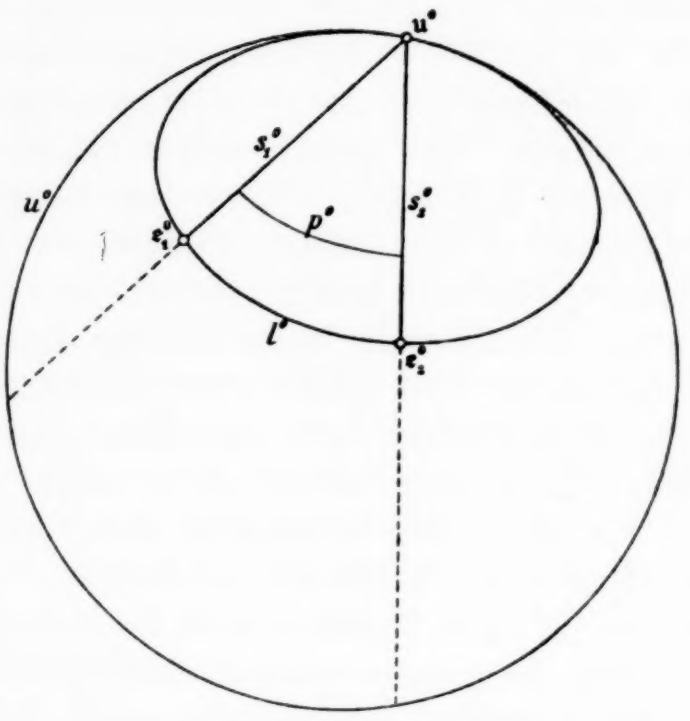

Fig. 4.

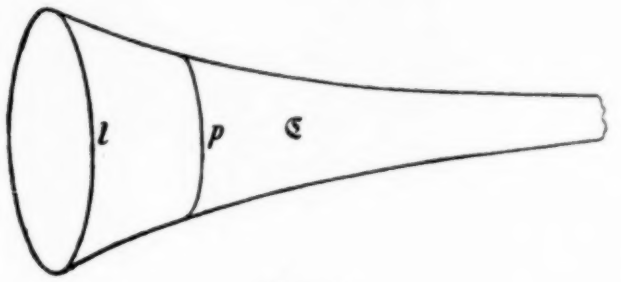

Fig. 5.

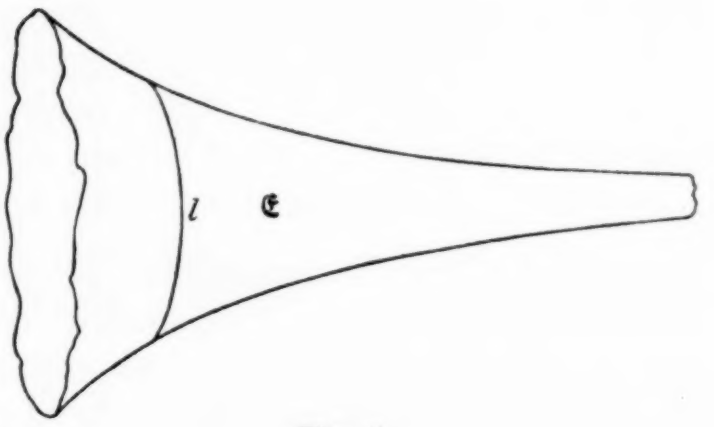

Fig. 6.

s_2^0 und l^0 liegt, ausschneiden und längs s_1^0 und s_2^0 so zusammenheften, daß e_1^0 und e_2^0 zur Deckung kommen. Zeichnen wir auf diesem Flächenstück fester negativer Krümmung, $\mathfrak{E}$ (Fig. 5), im Abstand $\frac{d}{2}$ von l eine Parallelkurve p, so können wir zunächst beweisen, daß kein Punkt des Teiles von $\mathfrak{E}$, der sich von p an ins Unendliche erstreckt, und auch kein Punkt von p selbst einer geschlossenen Geraden angehören kann, deren Länge kleiner als d ist. Denn eine solche könnte l nicht erreichen, da schon der kürzeste Abstand irgendeines Punktes von p von irgendeinem Punkt von $l \geqq \frac{d}{2}$ ist; sie müßte also ganz auf $\mathfrak{E}$ liegen. Dann wäre sie aber auch eine geschlossene Gerade auf derjenigen Nicht-Killingschen Fläche $\mathfrak{F}$, die wir aus $\mathfrak{E}$ erhalten, wenn wir das zwischen l^0 und der Verlängerung von s_1^0 und s_2^0 über e_1^0 und e_2^0 hinaus innerhalb $\mathfrak{F}^0$ liegende Gebiet nach geeigneter Identifizierung dieser Verlängerungen an l anheften (Fig. 6). Die Gruppe der Deckbewegungen dieser Fläche ist aber zyklisch mit einer Drehung um u^0 als einziger Erzeugenden, enthält also keine Schiebungen und Paddelungen [19]); es kann daher auf dieser Fläche überhaupt keine geschlossene Gerade geben [20]). Damit ist gezeigt, daß keine Achse, deren Spur eine geschlossene Gerade mit einer Länge $< d$ ist, durch das Gebiet zwischen s_1^0, s_2^0 und p^0 laufen kann. Ebenso können wir überall, wo $\mathfrak{B}^0$ an eine Ecke auf u^0 heranreicht, ein Stück abschneiden, durch das keine solche Achse gehen kann. Durch den Teil von $\mathfrak{B}^0$, der dann übrig bleibt, geht also von jeder geschlossenen Geraden, deren Länge

---

[19]) Diss. S. 32.

[20]) Vergl. Diss. S. 53 f. — Die in Fig. 6 dargestellte Fläche erwähnt auch *Koebe* besonders: Acta math. **50**, S. 157.

$< d$ ist, wenigstens ein Bild hindurch, und er liegt ganz im Endlichen, läßt sich also in einen endlichen Kreis einschließen. Weiterhin verläuft der Beweis wie oben.

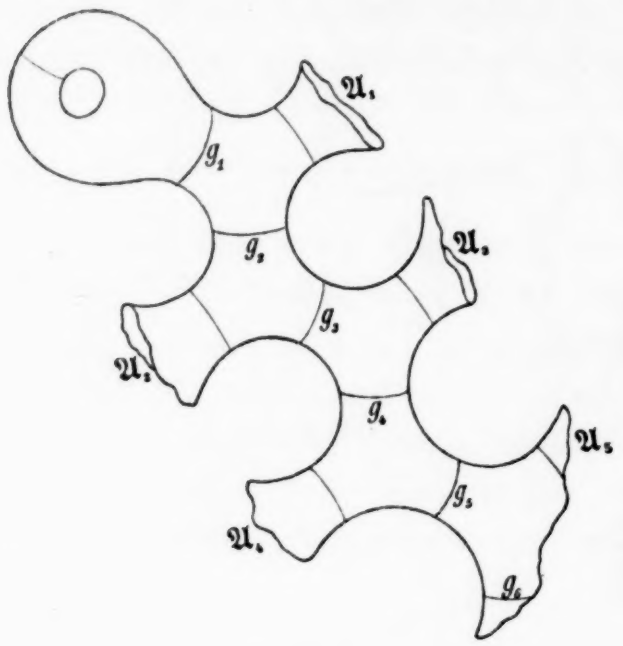

Fig. 7.

Als einfache Folge des bisher Bewiesenen ergibt sich nun der Satz:

In jeder Fläche $\mathfrak{E}$ negativer Krümmung mit endlicher Charakteristik c gibt es eine oder mehrere geschlossene Geraden von kleinster Länge.

Es sei nämlich g irgendeine geschlossene Gerade; ihre Länge sei d. Dann gibt es eine endliche Anzahl von geschlossenen Geraden, deren Längen $\leqq d$ sind. Unter den Längen dieser Geraden ist eine kleinste (möglicherweise $= d$), und es gibt eine endliche Anzahl von geschlossenen Geraden, die diese kleinste Länge haben (möglicherweise gehört g zu diesen).

Für C-K-Flächen mit unendlich großer Charakteristik braucht dieser Satz nicht zu gelten. Es ist leicht, wenigstens eine Nicht-Killingsche Fläche $\mathfrak{E}$ anzugeben, in der die Längen der geschlossenen Geraden die untere Grenze 0 haben: Man braucht nur in der in Figur 7 gezeichneten Fläche, die sich in übersichtlicher Weise aus unendlich vielen Doppelsechsecken aufbauen läßt, die Längen der Rückkehrgeraden $g_1, g_2, g_3, \ldots$ so zu wählen, daß sie eine gegen Null konvergierende Folge bilden. Die Grenze 0 kann aber von den Längen keiner geschlossenen Geraden angenommen werden.

§ 2. Endlichkeit der Ordnung der Gruppe der eindeutigen Bewegungen einer C-K-Fläche mit endlicher positiver Charakteristik.

Wir wollen das gewonnene Ergebnis dazu benützen, den Satz zu beweisen:

Die Gesamtheit der eindeutigen Bewegungen [21]) *einer Fläche $\mathfrak{E}$ mit endlicher positiver Charakteristik c bildet eine Gruppe endlicher Ordnung.*

Zunächst bedenken wir, daß eine eindeutige Bewegung jeder geschlossenen Geraden wieder eine solche zuweisen muß [22]). Wählen wir eine beliebige geschlossene Gerade g aus, so kann es aber, da wir c als endlich voraussetzen, nach dem oben Bewiesenen nur eine endliche Anzahl ihr kongruenter geschlossener Geraden geben. Ferner gibt es nur eine endliche Anzahl eindeutiger Bewegungen, die g wieder mit g zur Deckung bringen: Eine solche Bewegung kann nämlich nur eine Umwendung um g oder um ein Lot von g oder das Ergebnis der Aufeinanderfolge mehrerer solcher Bewegungen sein.

Während es nur eine Umwendung um g gibt, könnte es jedoch unendlich viele Umwendungen um Lote von g und Schiebungen und Paddelungen längs g als Achse geben, die für die Fläche $\mathfrak{E}$ eindeutig sind. Da wir aber jede der etwa vorhandenen eindeutigen Umwendungen mit einer bestimmten unter diesen zu einer eindeutigen Schiebung längs g zusammensetzen können, so sehen wir, daß wir für unsere weitere Überlegung annehmen dürfen, wir hätten es nur mit Schiebungen längs g zu tun, die, da sie zwar eindeutig, aber keine Deckbewegungen der Fläche $\mathfrak{E}$ sein sollen, irgendeine andere geschlossene Gerade h (die auf $\mathfrak{E}$ wegen der Voraussetzung $c > 0$ gewiß vorhanden [23]) ist) (Fig. 8)

[21]) Siehe Diss. S. 23 f.
[22]) Siehe Diss. S. 98, Anm. [130]).
[23]) Vergl. Diss. S. 64, 76, 78.

in unendlich viele verschiedene Lagen bringen würden. Unter diesen eindeutigen Schiebungen müßten nämlich infinitesimale vorkommen, weil die unendlich vielen Punkte, in die sie einen bestimmten Punkt von g überführen, wegen der endlichen Gesamtlänge von g wenigstens einen Häufungspunkt auf g haben müßten; betrachten wir also ein genügend kleines Kreisgebiet $\mathfrak{K}$ mit irgendeinem Punkt von h als Mittelpunkt, so enthielte dieses unendlich viele Stücke s der aus h durch die eindeutigen Schiebungen mit der Achse g hervorgehenden geschlossenen Geraden, die zudem noch einen zu diesem Gebiet $\mathfrak{K}$ konzentrischen kleineren Kreis k schneiden, und diese könnten nicht einer endlichen Anzahl geschlossener Geraden angehören, weil die Längen der innerhalb von $\mathfrak{K}$ liegenden Stücke s eine von Null verschiedene untere Schranke, nämlich die Länge der den Kreis k berührenden Sehnen von $\mathfrak{K}$, besitzen. Dies widerspricht aber wieder dem Satze, daß es nur eine endliche Anzahl von geschlossenen Geraden in $\mathfrak{E}$ gibt, die dieselbe Länge wie h haben.

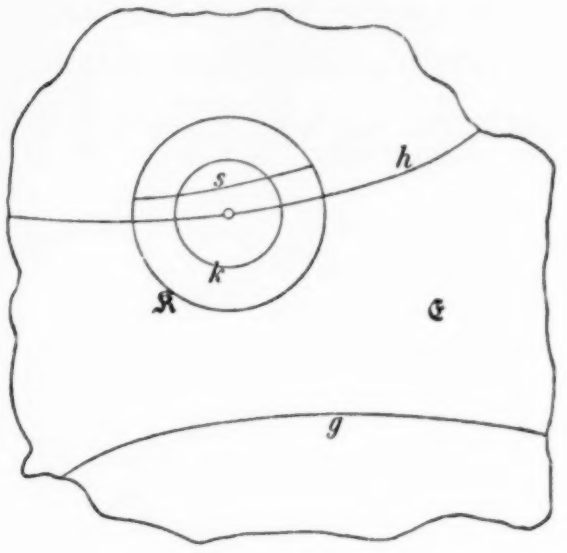

Fig. 8.

Daß der damit bewiesene Lehrsatz für C-K-Flächen mit unendlich großer Charakteristik nicht immer gilt, zeigen einfache Beispiele (etwa das der in Figur 3 dargestellten Fläche)[23a]).

Die eindeutigen Bewegungen einer C-K-Fläche bilden in ihrer Gesamtheit eine Gruppe; denn sie erfüllen die bekannten vier Gruppenaxiome.

§ 3. Eine besonders einfache C-K-Fläche positiver Charakteristik.

Zunächst möge noch eine allgemeingültige, für später nützliche Überlegung angestellt werden:

Zwischen den äußersten Rückkehrgeraden[24]) einer C-K-Fläche mit positiver Charakteristik und den innerhalb ihres Binnenteils verlaufenden „inneren geschlossenen Geraden“ besteht ein charakteristischer Unterschied:

Eine äußerste Rückkehrgerade einer C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ mit positiver Charakteristik c kann nicht von einer anderen geschlossenen Geraden geschnitten werden; denn jede Gerade, die eine äußerste geschlossene Gerade überschreitet, muß wenigstens in der einen Richtung ins Unendliche verlaufen[25]). *Dagegen wird jede geschlossene Gerade, die nicht eine äußerste ist, von anderen geschlossenen Geraden geschnitten.*

Beweis: Es sei g^0 ein Bild irgendeiner inneren geschlossenen Geraden g von $\mathfrak{E}$. Da wir c als positiv voraussetzen, so gibt es auf jedem der beiden Teile des absoluten Kegelschnitts u^0, in die g^0 diesen zerlegt, Punkte, in die Bilder geschlossener Geraden

---

[23a]) Bemerkung bei der Korrektur: Herr *Koebe* hat mich (im Herbst 1929) gütigst darauf aufmerksam gemacht, daß der hier in § 2 bewiesene Satz in dem folgenden, schon von *Poincaré* ausgesprochenen, allgemeineren Satze enthalten ist: *Die Gruppe der eindeutigen Bewegungen einer C-K-Fläche positiver (auch unendlicher) Charakteristik ist eigentlich diskontinuierlich,* dessen Beweis darauf beruht, daß die Existenz infinitesimaler eindeutiger Bewegungen in solchen Flächen das Vorkommen von homotopen, untereinander verschiedenen geschlossenen Geraden zur Folge hätte, was eben in solchen Flächen ausgeschlossen ist. — Der oben durchgeführte Beweis dürfte trotzdem sein Interesse nicht verlieren, weil die ihm zur Grundlage dienenden Sätze des § 1 an und für sich schon für die Geometrie der C-K-Flächen von Bedeutung sind.

[24]) Siehe Diss. S. 76 u. 77.

[25]) Vergl. die in Fußnote [5]) angeführte Arbeit, S. 579.

einmünden. g_1^0 und g_2^0 seien zwei derartige Geraden, deren unendlich ferne Punkte nicht alle auf derselben Seite von g^0 liegen mögen; schneidet nicht schon wenigstens eine der Geraden g_1^0 und g_2^0 die Gerade g^0, so trennt diese also g_1^0 und g_2^0 voneinander (Fig. 9). g_1^0 und g_2^0 besitzen dann ein gemeinsames Lot l^0. Unter den Loten auf g_1^0 und g_2^0 in den Abständen ms_1 und ns_2 von l^0, wo s_i die Länge der Spur von g_i^0 ($i = 1, 2$) sei und m und n

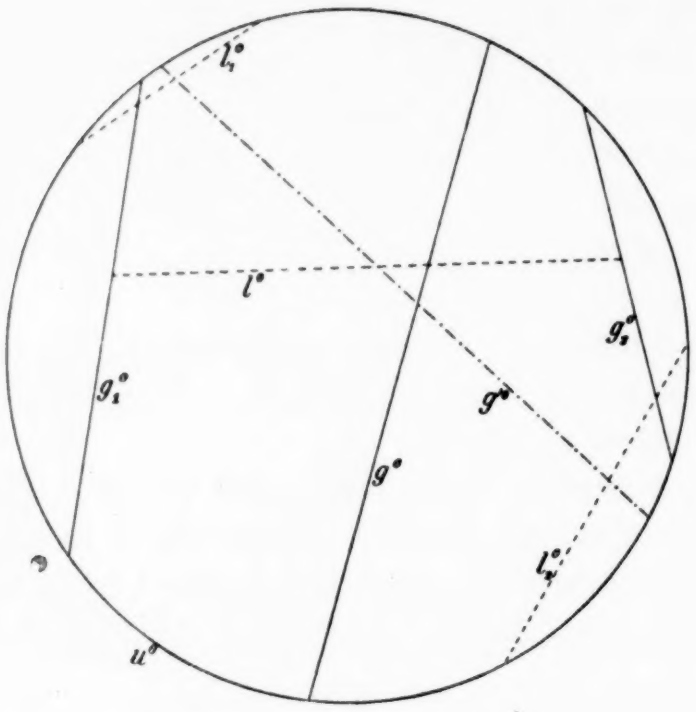

Fig. 9.

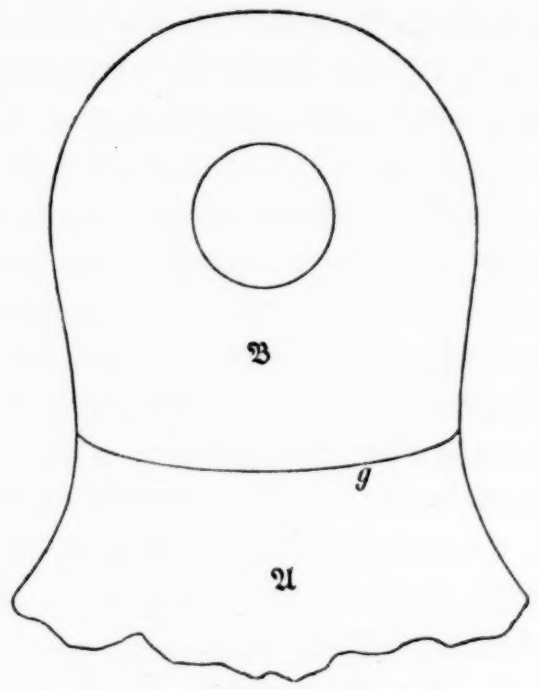

Fig. 10.

alle ganzen Zahlen bedeuten mögen, gibt es nun solche, l_1^0 und l_2^0, die ganz durch g^0 voneinander getrennt werden. Ihr gemeinsames Lot g'^0 ist Bild einer geschlossenen Geraden [26]) in $\mathfrak{E}$ und schneidet g^0. Dies war zu beweisen [27]).

Jetzt möge *ein Beispiel einer höchst einfachen C-K-Fläche* $\mathfrak{E}$ betrachtet werden, nämlich *eine aus einem Doppelsechseck und einem Außenteil bestehende zweiseitige Fläche* [28]), für die also die Charakteristik $c = 1$, die Anzahl der uneigentlichen Konturen [29]) $n = 1$, die der uneigentlichen Punktierungen $m = 0$ ist (Fig. 10):

Ihr Außenteil [30]) $\mathfrak{A}$ hängt mit ihrem Binnenteil $\mathfrak{B}$ längs ihrer einzigen äußersten Rückkehrgeraden g zusammen; wir schneiden ihn längs g ab und betrachten nur noch den Binnenteil der Fläche, der die einzige Randgerade g hat (Fig. 11) [31]). Da $\mathfrak{B}$ das Ge-

---

[26]) Siehe die in Fußnote [5]) angeführte Arbeit S. 585 ff.

[27]) Der Beweis ist auch für Flächen ohne äußerste Rückkehrgerade stichhaltig. — Die Menge der Schnittpunkte von g mit anderen geschlossenen Geraden ist abzählbar unendlich und in sich dicht, und zwar häufen sich die Schnittpunkte zu beiden Seiten jedes Schnittpunktes; dies folgt daraus, daß jede Achse einer Deckbewegung Häufungslage solcher Achsen ist (s. die in Fußnote [5]) zitierte Arbeit S. 589 ff.), und zwar, wenn sie nicht Bild einer äußersten Rückkehrgeraden ist, von jeder Seite her.

[28]) Als einfachste C-K-Fläche positiver Charakteristik muß die angesehen werden, für die $c = 1$ und $n = 3$ ist.

[29]) Diss. S. 52.

[30]) Diss. S. 75 u. S. 67.

[31]) Die folgenden Ausführungen würden aber ihre Gültigkeit bewahren, wenn die Fläche eine Nicht-Killingsche wäre, wenn sie also statt der unerreichbaren Randkurve einen unerreichbaren isolierten Randpunkt besäße; ein Außenteil wäre dann nicht vorhanden.

schlecht $p = \frac{c-n}{2} + 1 = 1$ hat, so gibt es eine (zu g nicht homotope) Rückkehrgerade g_1 von der Art, daß, wenn wir $\mathfrak{B}$ längs g_1 aufschneiden, das Flächenstück $\mathfrak{B}$ in ein schlichtartiges Flächenstück, und zwar im vorliegenden Fall in ein Doppelsechseck, übergeht, das außer von g noch von zwei untereinander gleichlangen Randgeraden g' und g'' begrenzt wird. Die gemeinsamen Lote von g, g', g'' sind in der Figur 12 gestrichelt gezeichnet.

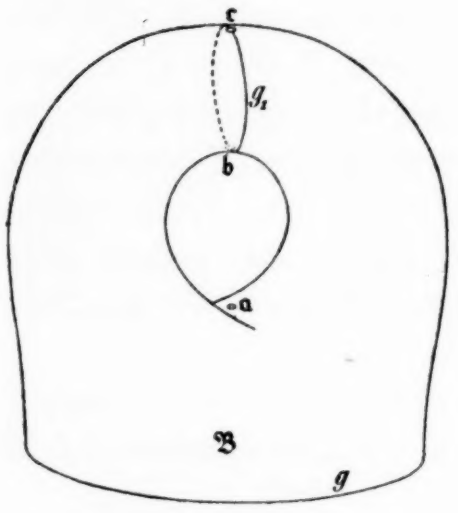

Fig. 11.

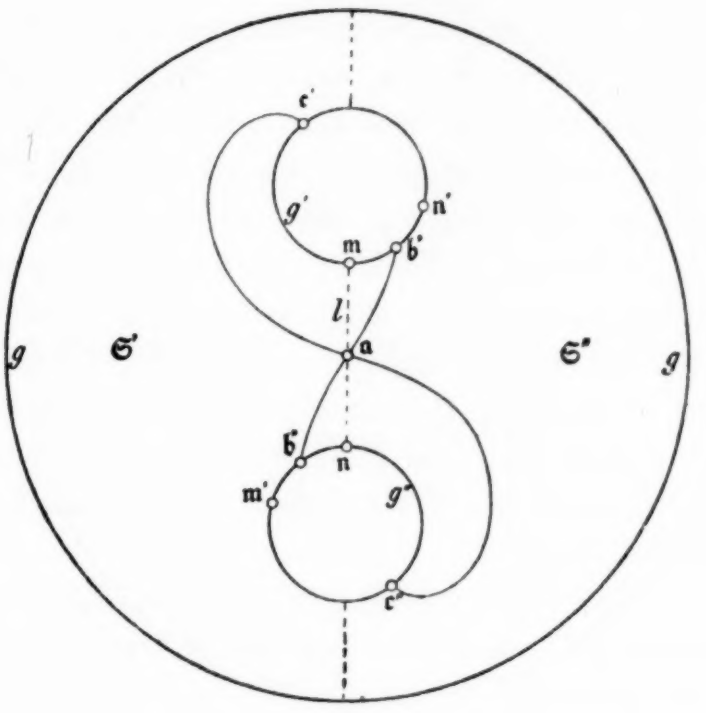

Fig. 12.

Wir wollen untersuchen, ob es in der Fläche von der Identität (d. h. von den Deckbewegungen der Fläche) verschiedene eindeutige Bewegungen gibt. Wenn eine solche, C, existiert, so muß sie g ungeändert lassen. Denn zunächst muß sie jede geschlossene Gerade wieder in eine solche (von gleicher Länge) überführen, da sie sonst nicht jedem Punkte dieser Geraden genau einen Punkt zuordnen könnte; ferner kann C die äußerste Rückkehrgerade g nicht mit einer inneren, d. h. innerhalb $\mathfrak{B}$ liegenden geschlossenen Geraden zur Deckung bringen, weil jede solche, wie wir oben gesehen haben, von andern geschlossenen Geraden geschnitten wird, g aber nicht. Da $\mathfrak{B}$ nicht in $\mathfrak{A}$ übergehen kann, so muß also C eine Schiebung längs g oder eine Umwendung um ein Lot von g sein. Wir bemerken nun, daß die Schiebung D längs g um die halbe Länge von g gerade die beiden bezüglich der gemeinsamen Lote von g, g', g'' symmetrischen Hälften $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ von $\mathfrak{B}$ miteinander vertauscht, wobei insbesondere g' und g'' untereinander vertauscht werden. Der Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ des gemeinsamen Lotes l von g' und g'' bleibt dabei ungeändert. $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ seien die Fußpunkte von l auf g' und g''. Vor dem Aufschneiden von $\mathfrak{B}$ längs g_1 möge $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{n}'$ zusammengefallen sein. Da ein bestimmter Richtungssinn auf g_1 nach dem Zerschneiden wegen der Zweiseitigkeit von $\mathfrak{B}$ auf g' und g'' Richtungssinne ergibt, die einander, wenn man sie nach dem Prinzip kohärenter Indikatrizen vergleicht, entgegengesetzt sind, so liegen $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{n}'$ in verschiedenen der Hälften $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$, wenn sie nicht auf $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ oder die Fußpunkte der gemeinsamen Lote von g' und g und von g'' und g fallen. Daher findet man, daß die Mittelpunkte $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ der beiden von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}'$ gebildeten Teile von g' vermöge der Schiebung D mit den zwei Mittelpunkten $\mathfrak{b}''$ und $\mathfrak{c}''$ der beiden von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}'$ gebildeten Teile von g'' zur Deckung kommen. Sowohl der Punkt $\mathfrak{b}$, aus dem $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{b}''$, als auch der Punkt $\mathfrak{c}$, aus dem $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ durch das Aufschneiden von $\mathfrak{B}$ längs g_1 hervorgingen, bleibt also bei dieser Bewegung ebenfalls un-

geändert. Und zwar kann man D als *Umdrehung gleichzeitig um* $\mathfrak{a}$ *und um* $\mathfrak{b}$ *und um* $\mathfrak{c}$ *ansehen.* Jeder Punkt im Innern von $\mathfrak{S}'$ wird durch D in einen Punkt im Innern von $\mathfrak{S}''$ übergeführt, jeder innere Punkt der $\mathfrak{S}'$ angehörenden Hälfte von g in einen inneren Punkt der $\mathfrak{S}''$ angehörenden Hälfte von g, die gemeinsamen Endpunkte der beiden Hälften von g vertauschen sich, das gemeinsame Lot von g und g' wird mit dem von g und g'' vertauscht. Auf l ist $\mathfrak{a}$ der einzige Fixpunkt, und auf g' gibt es außer $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ keinen weiteren Punkt, der durch D mit einem Punkt auf g'' zur Deckung gebracht würde, mit dem er vor dem Zerschneiden von g_1 zusammenfiel. Folglich sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *die einzigen Punkte auf* $\mathfrak{E}$, *die bei der Bewegung* D *fest bleiben.* Nun wurde oben diese Bewegung ganz unabhängig von der besonderen Geraden g_1 definiert, nämlich allein vermittelst der Lage und Länge der äußersten Rückkehrgeraden g. Wir wollen deshalb $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ als *die drei Hauptpunkte* der vorliegenden Fläche bezeichnen. Wir bemerken, daß die Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Rückkehrgerade g_1 vor dem Zerschneiden von $\mathfrak{B}$ längs g_1 in zwei gleiche Teile teilten, und daß auch die innerhalb des Doppelsechsecks liegenden Strecken $\mathfrak{b}'\,\mathfrak{b}''$ mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}''$ mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ vor dem Zerschneiden von $\mathfrak{B}$ längs g_1 Rückkehrgeraden waren, von denen die erste von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die zweite von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ in zwei gleiche Teile geteilt wurde; bedenken wir ferner, daß g_1 eine ganz beliebige unter den zu g nicht homotopen Rückkehrgeraden war, so können wir den Satz aussprechen:

Jede Rückkehrgerade unserer Fläche $\mathfrak{E}$ *mit Ausnahme ihrer äußersten Rückkehrgeraden geht durch zwei der drei Hauptpunkte der Fläche und wird von diesen in zwei gleiche Teile geteilt.*

Es sei bemerkt, daß dieser Satz nicht für alle geschlossenen Geraden gilt, z. B. gewiß nicht für die geschlossene Gerade h in Figur 13, von der man den vierten Teil erhält, wenn man von $\mathfrak{a}$ (in Figur 14, die $\mathfrak{S}''$ allein zeigt) ein Lot auf das gemeinsame Lot von g' und g fällt; sie hat $\mathfrak{a}$ als Doppelpunkt und geht nicht durch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$.

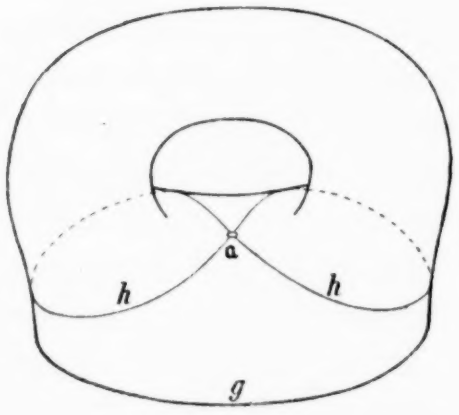

Fig. 13.

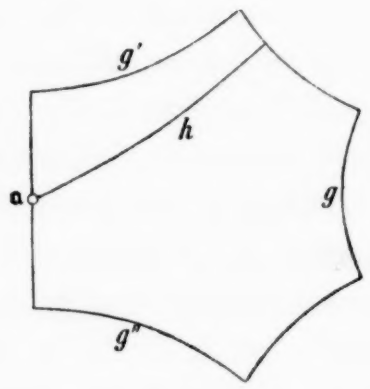

Fig. 14.

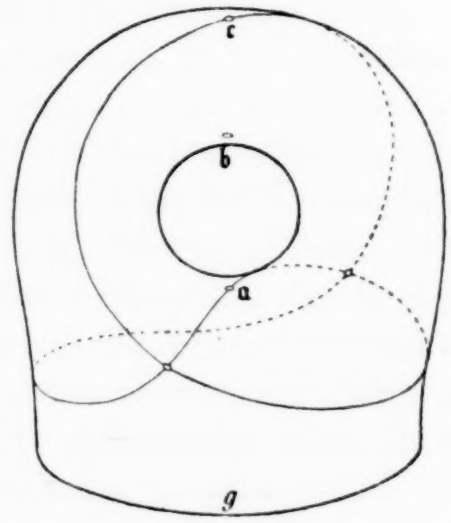

Fig. 15.

Die Einfachheit der bei dieser Fläche vorliegenden Verhältnisse bewirkt, daß von dem oben ausgesprochenen Satze bis zu einem gewissen Grade auch die Umkehrung gilt:

Jede Gerade durch zwei der Hauptpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *ist geschlossen.*

Betrachten wir nämlich nur eine Teilstrecke zwischen den beiden Hauptpunkten, so geht diese vermöge D in eine Strecke über, die die erste zu einer geschlossenen Kurve ergänzt; die zweite Strecke liegt aber auf der Geraden, der die erste Strecke angehört.

Ebenso beweist man, daß eine Gerade, die durch einen Hauptpunkt geht, und auf der man, wenn man sie in einem bestimmten Sinn durchläuft, wieder zu demselben Haupt-

punkt zurückkehrt, geschlossen ist; hat man dabei keinen anderen Hauptpunkt passiert, so kann diese geschlossene Gerade keine Rückkehrgerade sein. Es gibt aber auch geschlossene Geraden mit Doppelpunkten, die durch zwei der Hauptpunkte laufen, z. B. die in Figur 15 gezeichnete. Doppelpunkte, die keine Hauptpunkte sind, müssen in gerader Anzahl vorkommen. (Die Konstruktion der geschlossenen Geraden in Fig. 15 zeigt Fig. 16. Daß es tatsächlich Geraden gibt, die den in Figur 16 gezeichneten Verlauf

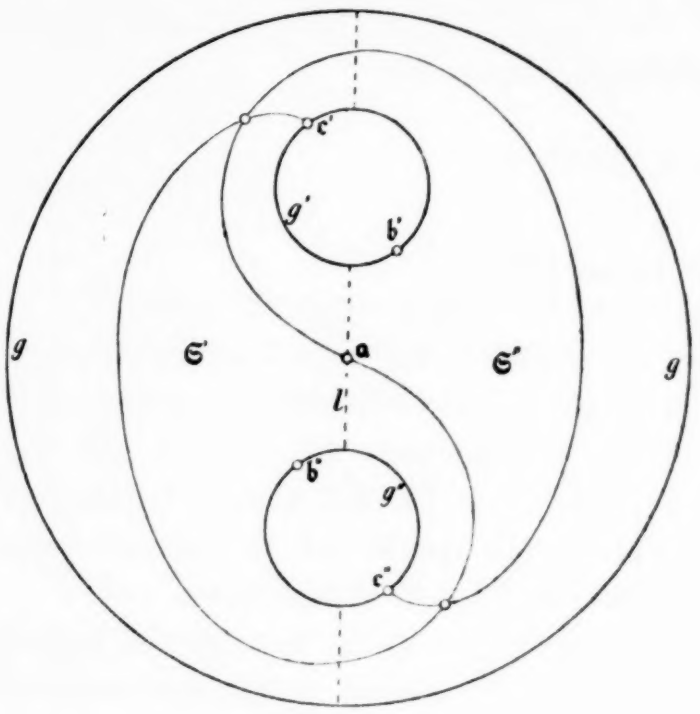

Fig. 16.

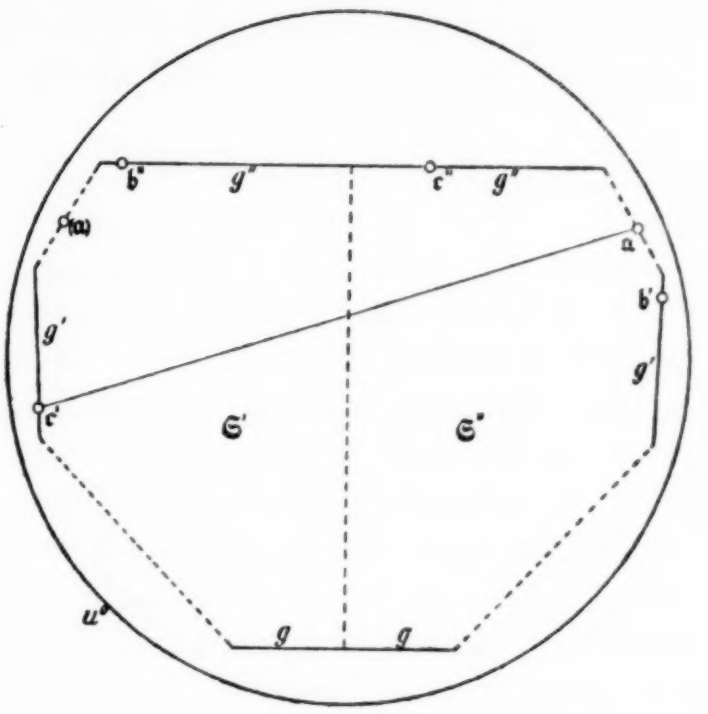

Fig. 17.

haben, erkennt man unmittelbar, wenn man $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ in der Lage betrachtet, die Figur 17 zeigt. Die Verbindungsstrecke von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{c}'$ liefert auf $\mathfrak{B}$ eine Hälfte von h; aus ihr geht die andere Hälfte durch die Umdrehung D um $\mathfrak{a}$ hervor.)

Es sei nur noch erwähnt, daß es außer D noch mehr eindeutige Bewegungen in der hier betrachteten Fläche geben kann; ihre Anzahl hängt von den besonderen Maßverhältnissen der Fläche ab.

Das hier besprochene Beispiel zeigt, daß einige der in einer früher angeführten Arbeit [32]) entwickelten allgemeingültigen Ergebnisse in speziellen Fällen erweitert werden können. So gilt der Satz, daß es, wenn g_1 und g_2 zwei geschlossene Geraden auf einer beliebigen C-K-Fläche $\mathfrak{F}$ sind, die einen Punkt $\mathfrak{p}$ gemein haben, und wenn $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ zwei Punkte auf g_1 und g_2 sind, die zusammen mit $\mathfrak{p}$ die Geraden, auf denen sie liegen, in zwei gleiche Teile teilen, immer unendlich viele geschlossene Geraden in $\mathfrak{F}$ gibt, die $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ verbinden und von $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ in zwei gleiche Teile geteilt werden; daß aber wie in dem soeben behandelten Beispiel jede Verbindungsgerade von $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ geschlossen ist, gilt durchaus nicht allgemein.

Schlußbemerkung. Es möge hier nur noch auf Folgendes hingewiesen werden: Für den in der Einleitung angeführten Satz von H. A. Schwarz hat H. Weyl einen Beweis [33]) angegeben, dessen Grundgedanke sich unmittelbar auf den in den vorliegenden Ausführungen behandelten Fall anwenden läßt, soweit es sich nicht um Nicht-Killingsche

---

[32]) S. Fußnote [5]).

[33]) *H. Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig und Berlin 1923, S. 165.

Flächen handelt. Wie man sich leicht überlegt, muß nämlich der Binnenteil $\mathfrak{B}$ jeder C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ bei jeder eindeutigen Bewegung von $\mathfrak{E}$ in sich übergehen; gäbe es nun unendlich viele eindeutige Bewegungen in $\mathfrak{E}$, so könnte man einen Punkt in $\mathfrak{B}$ finden, der bei der Ausübung aller dieser Bewegungen in eine Menge von Punkten in $\mathfrak{B}$ überginge, die wenigstens einen Häufungspunkt $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{B}$ besitzen müßten, und dies eben kann man nach H. Weyl als unmöglich nachweisen. Jedoch könnte dieser Schluß auf das Vorhandensein des Häufungspunktes $\mathfrak{h}$ bei einer Nicht-Killingschen Fläche nicht ohne weiteres gezogen werden, da ihr Binnenteil zwar den endlichen Flächeninhalt $2\pi c$ hat, sich aber gegen die „uneigentlichen Punktierungen“ hin ins Unendliche erstreckt.

Eingegangen 12. Januar 1929.

Zur Frage der Struktur der geschlossenen geodätischen Linien in den offenen Clifford-Kleinschen Flächen mit positiver Charakteristik *).

Von *Frank Löbell* in Stuttgart.

In einer früheren Arbeit, die den geodätischen Linien — kurz den „Geraden" — in den Clifford-Kleinschen Flächen — den „C-K-Flächen" — mit positiver Eulerscher Charakteristik gewidmet war [1]), ergab sich als Folgerung aus einem allgemeineren Satze, daß *die Punkte der geschlossenen Geraden einer geschlossenen C-K-Fläche positiver Charakteristik diese überall dicht überdecken*, ja, daß sogar *die Linienelemente der geschlossenen Geraden in der Menge aller Linienelemente der Fläche überall dicht liegen* [2]).

Nun besteht *jede C-K-Fläche mit positiver Charakteristik*, wie an anderer Stelle [3]) gezeigt wurde, aus einem sogenannten *Binnenteil*, der ein von einfachen geschlossenen Geraden begrenztes Gebiet in der Fläche ist, und aus sogenannten *Außenteilen*, deren jeder eine „uneigentliche Kontur" der Fläche repräsentiert, so daß also bei jeder geschlossenen C-K-Fläche positiver Charakteristik, allgemeiner bei jeder C-K-Fläche ohne uneigentlichen Rand, der Binnenteil mit der Gesamtfläche identisch ist. Der Binnenteil hat nun unter anderem stets die Eigenschaft, daß er alle geschlossenen Geraden der C-K-Fläche, der er angehört, in seinem Innern oder als Randgeraden enthält. Daher drängt sich zunächst die Vermutung auf, daß vielleicht ganz allgemein die Punkte der geschlossenen Geraden einer C-K-Fläche positiver Charakteristik deren Binnenteil überall dicht überdecken; der Zweck der folgenden Ausführungen ist, diese Vermutung durch Aufstellung verschiedener Beispiele zu widerlegen.

Beispiele von C-K-Flächen positiver Charakteristik, in deren Binnenteil es Gebiete gibt, durch die keine Binnengerade läuft.

I.

Das einfachste derartige Beispiel erhält man wohl auf die folgende Weise: Wir zeichnen (Fig. 1) in der Bolyai-Lobatschefskijschen Ebene $\mathfrak{E}^0$ drei Geraden g_1^0, g_2^0, g_3^0,

*) Aus des Verfassers Habilitationsschrift.

[1]) *Löbell*, Über die geodätischen Linien der Clifford-Kleinschen Flächen. Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 572 ff.

[2]) A. a. O. S. 589 u. 592. Für spezielle geschlossene C-K-Flächen hatte dies schon *J. Nielsen* bewiesen; siehe die Literaturnachweise in der in Fußnote [1]) angeführten Arbeit.

Das dem oben erwähnten allgemeineren Satze zugrunde liegende Lemma, das in der in Fußnote [1]) zitierten Arbeit auf S. 590 gesperrt gedruckt ist, wurde wohl zum erstenmal in der Arbeit von *Myrberg*, Über die automorphen Funktionen zweier Veränderlichen, Acta math. **43** (1922), S. 303, veröffentlicht.

Zusatz bei der Korrektur: Man vergleiche auch die im vorliegenden Band dieser Zeitschrift auf S. 115 in Fußnote [6]) angegebenen Schriften neueren Datums.

[3]) *Löbell*, Die überall regulären unbegrenzten Flächen fester Krümmung, Dissertation Tübingen 1927. (Im folgenden als „Diss." zitiert.)

die Bilder der Ränder eines Doppelsechsecks [4]) werden sollen, von denen also keine eine der andern schneiden oder die andern voneinander trennen darf. Die unendlich fernen Punkte von g_1^0, g_2^0, g_3^0 seien $u_1'^0$ und $u_1''^0$, $u_2'^0$ und $u_2''^0$, $u_3'^0$ und $u_3''^0$; die Reihenfolge, in der sie hier angegeben sind, soll auch ihre Reihenfolge auf dem absoluten Kegelschnitt u^0 sein. Ferner mögen g_1^0, g_2^0, g_3^0 so liegen, daß die Geraden $u_2'^0\,u_3''^0$, $u_3'^0\,u_1''^0$, $u_1'^0\,u_2''^0$

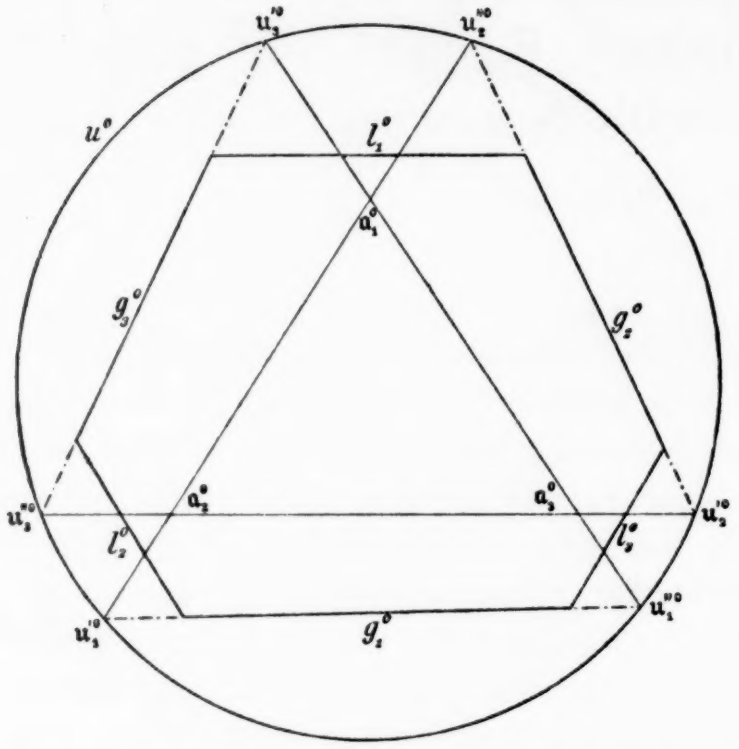

Fig. 1.

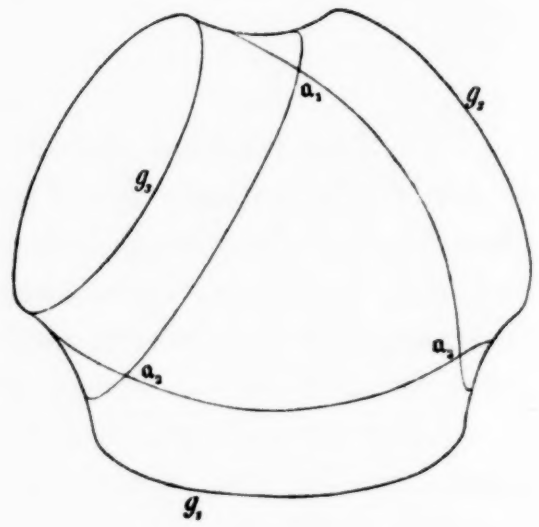

Fig. 2.

ein (nicht verschwindendes) Dreieck $\mathfrak{a}_1^0\,\mathfrak{a}_2^0\,\mathfrak{a}_3^0$ bilden, das innerhalb jedes der drei Dreiecke $\mathfrak{a}_1^0\,u_1'^0\,u_1''^0$, $\mathfrak{a}_2^0\,u_2'^0\,u_2''^0$, $\mathfrak{a}_3^0\,u_3'^0\,u_3''^0$ liegt. Zeichnen wir die gemeinsamen Lote l_1^0, l_2^0, l_3^0 von g_1^0, g_2^0, g_3^0 und heften das dadurch entstehende konvexe rechtwinklige Sechseck längs l_1^0, l_2^0, l_3^0 mit einem ihm kongruenten zusammen, so erhalten wir ein Doppelsechseck. Heften wir an dessen Randgeraden passende Außenteile [5]) an, so erhalten wir eine C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ mit der Charakteristik $c = 1$ und mit $n = 3$ uneigentlichen Rändern [6]), deren geschlossene Geraden sich in ihrem Binnenteil [7]), eben jenem soeben konstruierten Doppelsechseck (Fig. 2), so anordnen, daß sie durch keinen Punkt des (abgeschlossenen) Dreiecksbereiches [8]) $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ (und ebenso durch keinen Punkt des zu diesem bezüglich l_1, l_2, l_3 symmetrischen Dreiecksbereiches) hindurchgehen. In der Tat: Ist $\mathfrak{p}^0$ ein beliebiger Punkt im Innern des Dreiecks $\mathfrak{a}_1^0\,\mathfrak{a}_2^0\,\mathfrak{a}_3^0$, so trifft jede Gerade, die durch $\mathfrak{p}^0$ geht, wie man sich leicht überlegt, wenigstens eine der Geraden g_1^0, g_2^0, g_3^0 in einem eigentlichen Punkte, kann also nicht Bild einer Binnengeraden [9]), also erst recht nicht Bild einer geschlossenen Geraden sein. Die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ sind aber, da jede von ihnen nach jeder Richtung einer Rückkehrgeraden [10]) asymptotisch ist,

---

[4]) Diss. S. 68 ff.

[5]) Diss. S. 66 f. u. S. 75.

[6]) Diss. S. 52.

[7]) Diss. S. 73 ff.

[8]) Das Fortlassen des Zeigers ^{0} bei einem Buchstaben bedeutet den Übergang von dem durch ihn bezeichneten Gebilde in der universellen Überlagerungsfläche $\mathfrak{E}^0$ von $\mathfrak{E}$ zu seiner „Spur“ in $\mathfrak{E}$. Vergl. Diss, S. 17 ff.

[9]) Eine Binnengerade ist eine ganz im Binnenteil liegende Gerade. Siehe die in Fußnote [1]) angeführte Arbeit S. 579 ff., bes. S. 583.

[10]) Eine Rückkehrgerade ist eine geschlossene Gerade ohne mehrfachen Punkt. (Diss. S. 55.)

Binnengeraden, also Häufungslagen geschlossener Geraden, ohne aber selbst geschlossene Geraden sein zu können. Jede Gerade durch eine der Ecken $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, die keine Seite des Dreiecks ist, schneidet aber auch wenigstens eine der Geraden g_1, g_2, g_3, so daß also auch die Ecken selbst nicht auf geschlossenen Geraden liegen können.

Man kann unter gewissen Voraussetzungen noch mehr derartige Bereiche angeben: Konstruiert man nämlich (Fig. 3) die Spiegelbilder $\mathfrak{v}_2'^0$ von $\mathfrak{u}_2'^0$ und $\mathfrak{v}_2''^0$ von $\mathfrak{u}_2''^0$ bezüglich l_2^0 und die Spiegelbilder $\mathfrak{v}_3'^0$ von $\mathfrak{u}_3'^0$ und $\mathfrak{v}_3''^0$ von $\mathfrak{u}_3''^0$ bezüglich l_3^0, so erhält man zwei Geraden $\mathfrak{v}_2'^0\,\mathfrak{v}_2''^0$ und $\mathfrak{v}_3'^0\;\mathfrak{v}_3''^0$, die in der Abwicklung [11]) von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E}^0$, in der g_1^0, g_2^0, g_3^0 Bilder der drei äußersten Rückkehrgeraden g_1, g_2, g_3 von $\mathfrak{E}$ sind, ebenfalls Bilder von g_2

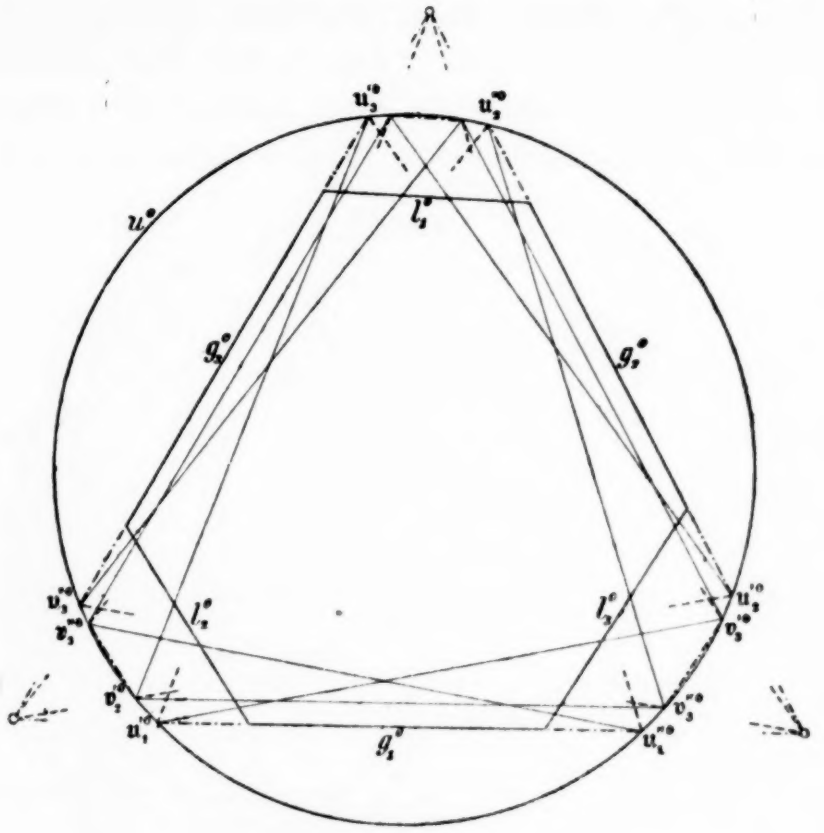

Fig. 3.

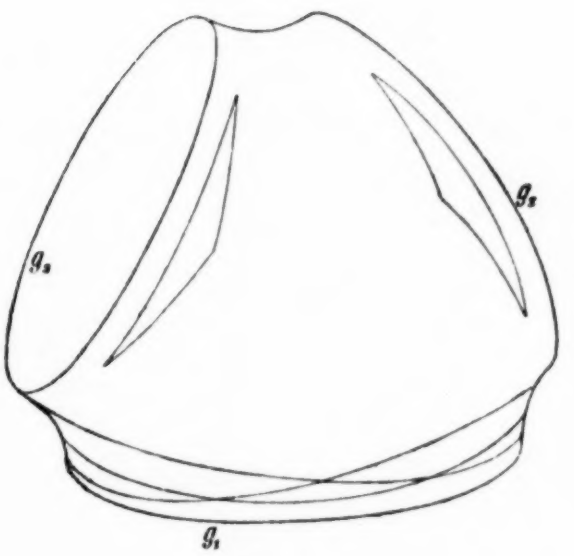

Fig. 4.

und g_3 sind. Wir verbinden $\mathfrak{u}_1'^0$ mit $\mathfrak{v}_3'^0$, $\mathfrak{u}_1''^0$ mit $\mathfrak{v}_2''^0$ und $\mathfrak{v}_2'^0$ mit $\mathfrak{v}_3''^0$. Waren die Längen der Rückkehrgeraden g_1, g_2, g_3 genügend groß gewählt, so liegt die Gerade $\mathfrak{v}_2'^0\,\mathfrak{v}_3''^0$ zwischen g_1^0 und dem Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{u}_1'^0\,\mathfrak{v}_3'^0$ und $\mathfrak{u}_1''^0\,\mathfrak{v}_2''^0$. In diesem Fall begrenzt das von den drei Geraden $\mathfrak{u}_1'^0\,\mathfrak{v}_3'^0$, $\mathfrak{u}_1''^0\,\mathfrak{v}_2''^0$, $\mathfrak{v}_2'^0\,\mathfrak{v}_3''^0$ gebildete Dreieck einen Bereich, der keinen Punkt mit einem Bild einer geschlossenen Geraden gemein hat; denn man überzeugt sich ohne Mühe davon, daß jede Gerade, die durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}^0$ im Innern oder auf dem Rande des Dreiecks geht, mindestens eine der Geraden g_1^0, $\mathfrak{v}_2'^0\,\mathfrak{v}_2''^0$, $\mathfrak{v}_3'^0\,\mathfrak{v}_3''^0$ schneidet oder wenigstens (wenn $\mathfrak{p}^0$ ein Randpunkt ist) zweien von ihnen asymptotisch ist, ihre Spur in $\mathfrak{E}$ also nicht geschlossen sein kann. Den Seiten, die selbst offene Binnengeraden sind, kommen aber wieder von außen Bilder geschlossener Geraden beliebig nahe. In derselben Weise kann man noch „neben“ g_2^0 und g_3^0 je ein Dreieck zeichnen, das dieselbe charakteristische Eigenschaft hat wie das soeben „neben“ g_1^0 angegebene, so daß wir bis jetzt auf der hier betrachteten Fläche $\mathfrak{E}$ außer den beiden oben konstruierten noch sechs weitere, von Punkten geschlossener Geraden freie Dreiecksbereiche gefunden haben (Fig. 4).

Leider ist aber hiermit noch kein Weg gezeigt, auf dem man zu allen derartigen Bereichen gelangen kann.

---

[11]) Diss. S. 17 ff.

II.

Es soll noch eine spezielle schlichtartige C-K-Fläche mit vier Rändern aufgebaut werden, in deren Binnenteil man nach dem am Anfang dieses Paragraphen angewendeten Prinzip Bereiche angeben kann, die mit keiner geschlossenen Geraden einen Punkt gemein haben: Wir konstruieren zunächst (Fig. 5) ein rechtwinkliges Achteck, und zwar in der Weise, daß wir zuerst vier Geraden $g_1^0, g_2^0, g_3^0, g_4^0$ zeichnen, von denen keine zwei einander schneiden und von denen je drei auf derselben Seite der vierten liegen; ihre unendlich fernen Punkte seien, in ihrer Reihenfolge auf dem absoluten Kegelschnitt, $u_1'^0$, $u_1''^0$, $u_2'^0$, $u_2''^0$, $u_3'^0$, $u_3''^0$, $u_4'^0$, $u_4''^0$. Wir ziehen weiter die Geraden $u_1'^0\, u_3''^0$, $u_1''^0\, u_3'^0$, $u_2'^0\, u_4''^0$, $u_2''^0\, u_4'^0$, $u_1'^0\, u_2''^0$, $u_1''^0\, u_4'^0$, $u_2'^0\, u_3''^0$, $u_3'^0\, u_4''^0$; diese acht Geraden bilden vier

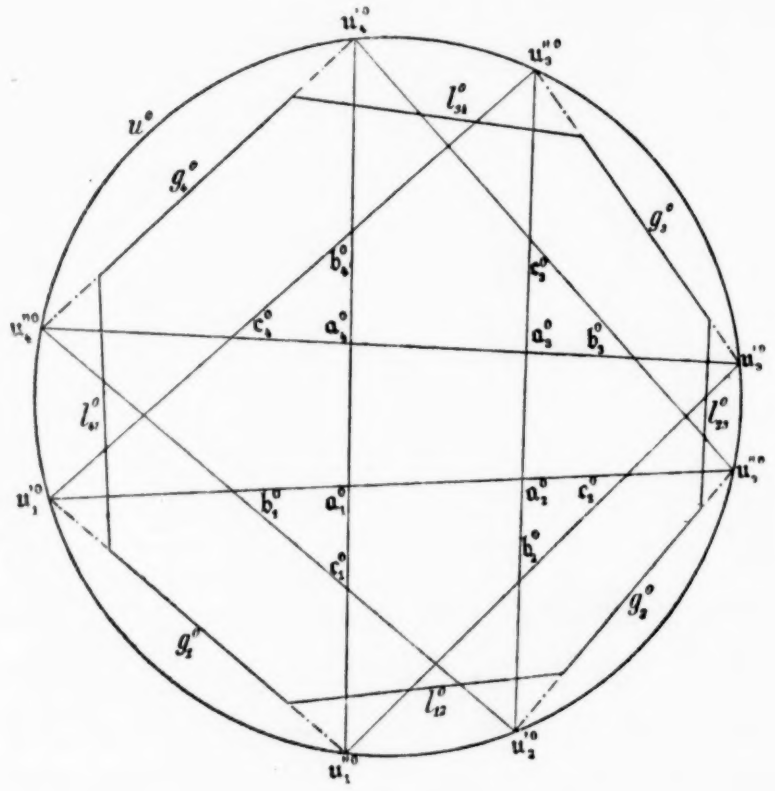

Fig. 5.

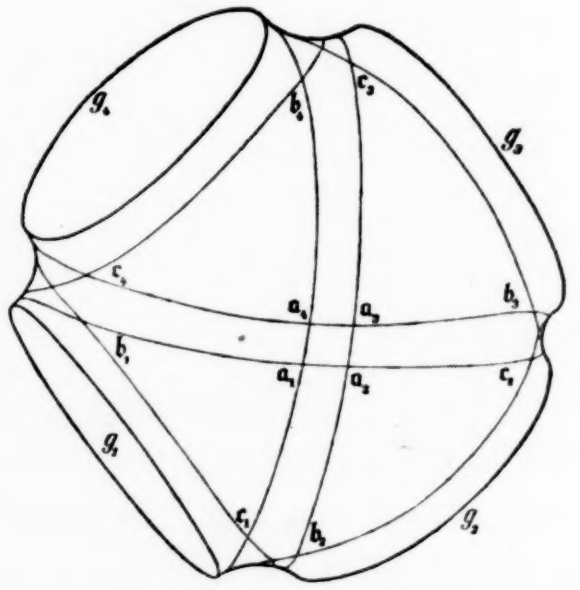

Fig. 6.

Dreiecke $a_1^0\, b_1^0\, c_1^0$, $a_2^0\, b_2^0\, c_2^0$, $a_3^0\, b_3^0\, c_3^0$, $a_4^0\, b_4^0\, c_4^0$. Waren die kürzesten Abstände l_{12}^0 von g_1^0 und g_2^0, l_{23}^0 von g_2^0 und g_3^0, l_{34}^0 von g_3^0 und g_4^0, l_{41}^0 von g_4^0 und g_1^0 klein genug gewählt, so ist der Dreiecksbereich $a_i^0\, b_i^0\, c_i^0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ein Teil des Dreiecksbereiches $a_i^0 u_i'^0\, u_i''^0$; dann sind aber die vier Dreiecke $a_i^0\, b_i^0\, c_i^0$ wieder so beschaffen, daß jede Gerade, die durch einen beliebigen Punkt eines dieser Dreiecke läuft, wenigstens eine der Geraden $g_1^0, g_2^0, g_3^0, g_4^0$ innerhalb $\mathfrak{E}^0$ schneidet [12]). Heften wir das von $g_1^0, l_{12}^0, g_2^0, l_{23}^0, g_3^0, l_{34}^0, g_4^0, l_{41}^0$ begrenzte konvexe rechtwinklige Achteck längs $l_{12}^0, l_{23}^0, l_{34}^0, l_{41}^0$ mit einem ihm kongruenten zusammen, so entsteht der Binnenteil einer schlichtartigen C-K-Fläche mit vier äußersten Rückkehrgeraden g_1, g_2, g_3, g_4, die aus $g_1^0, g_2^0, g_3^0, g_4^0$ hervorgehen (Fig. 6). Die vier Dreiecke $a_i\, b_i\, c_i$ (und vier ihnen kongruente in dem kongruenten Achteck) sind nach dem oben Gesagten Bereiche, deren Punkte (innere Punkte und Randpunkte) nicht auf geschlossenen Geraden liegen können, während ihren Rändern von außen her geschlossene Geraden beliebig nahe kommen, da die Randgeraden, die in beiden Richtungen zu äußersten Rückkehrgeraden asymptotisch sind, selbst Binnengeraden sind.

Man könnte genau wie beim ersten Beispiel auch auf dieser Fläche unter gewissen Voraussetzungen noch mehr derartige Dreiecksbereiche finden.

---

[12]) $\mathfrak{E}^0$ bezeichnet nur die Menge der eigentlichen Punkte der hyperbolischen Ebene.

III.

Das soeben beschriebene Verfahren kann auf schlichtartige Flächen mit beliebig vielen Rändern ausgedehnt werden, wenn nur die Längen der äußersten Rückkehrgeraden gewisse Bedingungen erfüllen. Geht man von einem geeigneten rechtwinkligen Zehneck aus, so kann man zeigen, daß einer der so konstruierten Bereiche auch dann noch seine charakteristische Eigenschaft bewahrt, wenn man zwei der äußersten Rückkehrgeraden, für deren Längengleichheit man gesorgt haben muß, zusammenheftet, so daß eine Fläche mit $n = 3$ uneigentlichen Rändern vom Geschlecht $p = 1$ entsteht. Wir zeichnen zunächst (Fig. 7) 5 Geraden $g_1^0, g_2^0, g_3^0, g_4^0, g_5^0$ so, daß keine zwei einander schneiden, daß jede die Ebene in zwei Halbebenen teilt, deren eine keine der übrigen Geraden enthält, und daß g_2^0 und g_3^0 in bezug auf eine eigentliche Gerade zu g_5^0 und g_4^0 symmetrisch liegen (die Indizes 1—5 sollen der Reihenfolge, in der die Geraden als Sehnen von u^0 beim Umfahren von u^0 aufeinanderfolgen, entsprechen); dann schließen sie zusammen

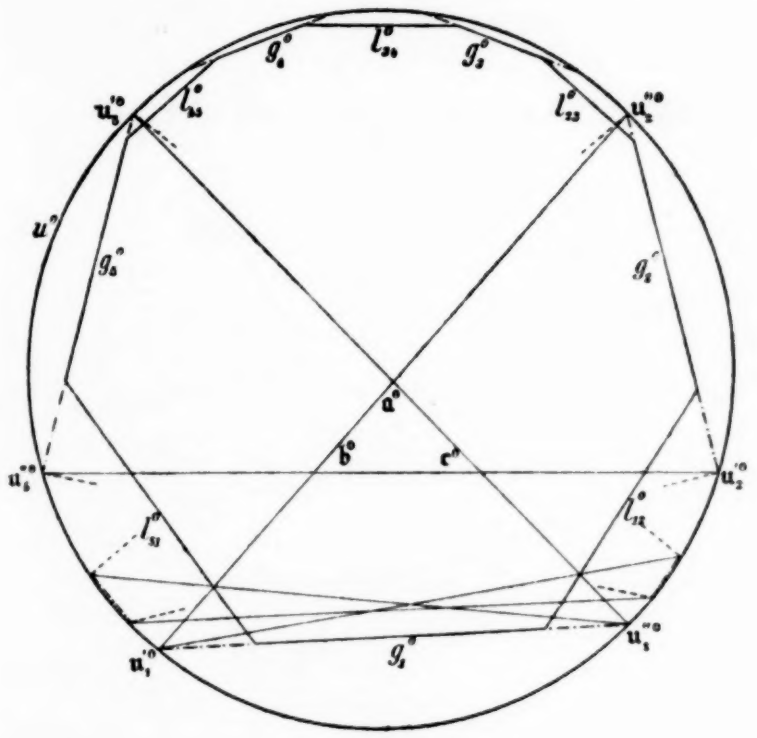

Fig. 7.

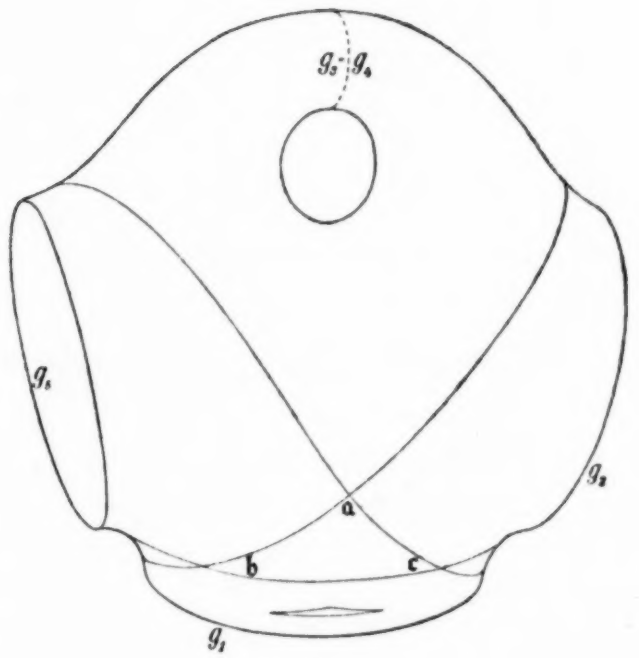

Fig. 8.

mit den gemeinsamen Loten l_{12}^0 von g_1^0 und g_2^0, l_{23}^0 von g_2^0 und g_3^0, l_{34}^0 von g_3^0 und g_4^0, l_{45}^0 von g_4^0 und g_5^0, l_{51}^0 von g_5^0 und g_1^0 ein konvexes rechtwinkliges Zehneck ein, dessen auf g_3^0 und auf g_4^0 liegende Seiten einander gleich sind. Die unendlich fernen Punkte von g_5^0, g_1^0, g_2^0 seien in der Reihenfolge, in der sie auf dem absoluten Kegelschnitt aufeinanderfolgen, $u_5'^0$, $u_5''^0$, $u_1'^0$, $u_1''^0$, $u_2'^0$, $u_2''^0$. Wir zeichnen nun die Geraden $u_5'^0\, u_1''^0$, $u_1'^0 u_2''^0$, $u_5''^0\, u_2'^0$; sie bilden ein Dreieck $\mathfrak{a}^0\, \mathfrak{b}^0\, \mathfrak{c}^0$, das, wenn l_{51}^0 und l_{12}^0 klein genug gewählt waren, in dem Dreieck $\mathfrak{a}^0\, u_1'^0\, u_1''^0$ liegt. Jede Gerade, die mit dem von diesem Dreieck begrenzten Bereich einen Punkt gemein hat, schneidet eine der Geraden g_1^0, g_2^0, g_5^0 oder ist zweien von ihnen asymptotisch. Heften wir das Zehneck mit einem ihm kongruenten längs $l_{12}^0, l_{23}^0, l_{34}^0, l_{45}^0, l_{51}^0$ zusammen und vereinigen dann irgendwie die gleichlangen aus g_3^0 und g_4^0 entstandenen Randgeraden miteinander (Fig. 8), so wird, da g_1^0, g_2^0, g_5^0 zu äußersten Rückkehrgeraden werden, aus $\mathfrak{a}^0\, \mathfrak{b}^0\, \mathfrak{c}^0$ ein Bereich, durch den keine geschlossene Gerade hindurchläuft, dessen Rande aber geschlossene Geraden beliebig nahe kommen.

Wenn die Längen der äußersten Randgeraden gewisse Bedingungen erfüllen, so kann man außer den zwei soeben gefundenen Bereichen wie oben noch mehr derartige Bereiche finden.

IV.

Es sei jetzt nur noch ein Beispiel einer C-K-Fläche angegeben, deren Binnenteil aus einem Doppelsechseck besteht und das Geschlecht $p = 1$ hat: Es mögen (Fig. 9) g_1^0, g_2^0, g_3^0 drei Geraden sein, die dieselben Lagebedingungen erfüllen wie die gleichbezeichneten Geraden im ersten Beispiel und die zudem eine Symmetrieachse besitzen, die senkrecht zu g_1^0 sei. Heften wir das rechtwinklige Sechseck, das sie zusammen mit ihren gemeinsamen Loten l_1^0, l_2^0, l_3^0 bilden, längs dieser Lote mit einem ihm kongruenten zusammen, so entsteht ein Doppelsechseck mit zwei kongruenten Randgeraden, die aus g_2^0 und g_3^0 entstehen; diese heften wir so zusammen, daß der Fußpunkt von l_2^0 auf g_3^0 mit dem Fußpunkt von l_3^0 auf g_2^0 zur Deckung kommt. An die aus g_1^0 entstandene äußerste

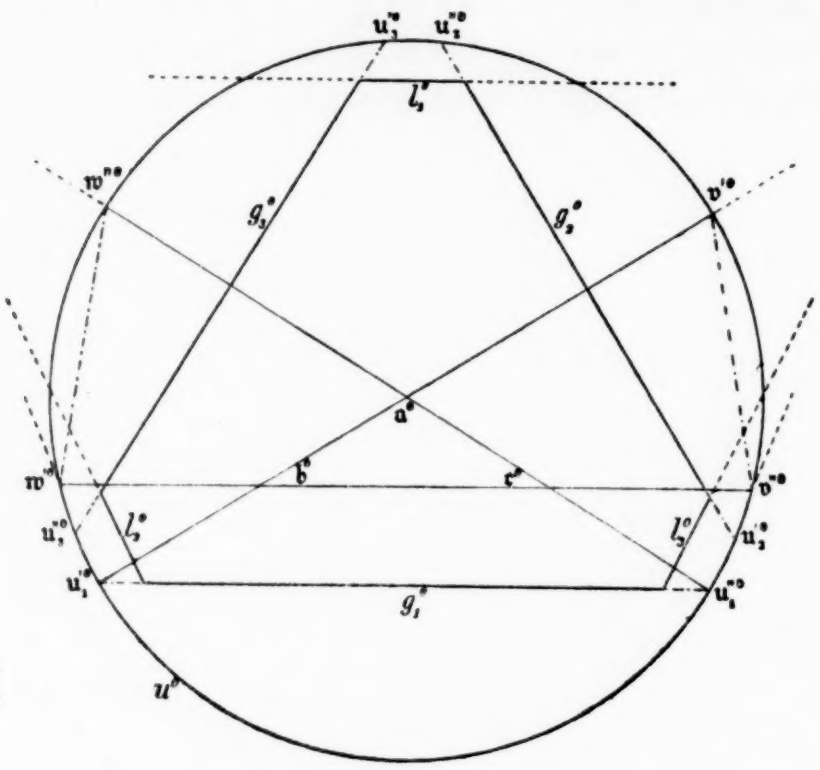

Fig. 9.

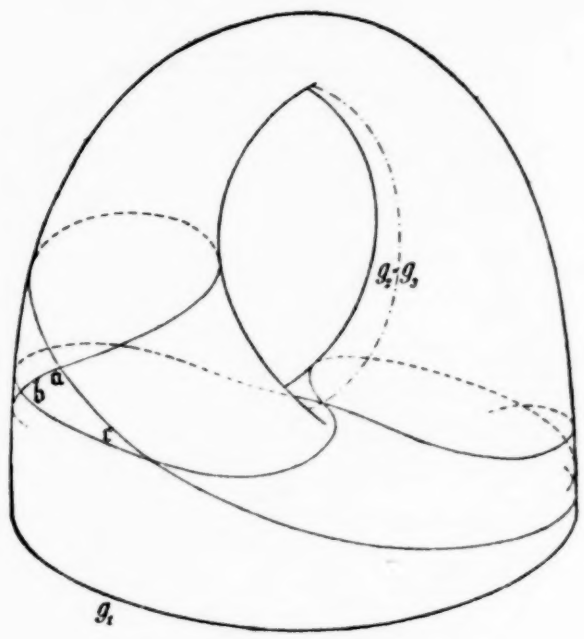

Fig. 10.

Rückkehrgerade g_1 fügen wir einen Außenteil an. Unter diesen Voraussetzungen erhält man zwei zu g_1^0 bezüglich der Gruppe Γ der Deckbewegungen [13]) unserer Fläche $\mathfrak{F}$ äquivalente Geraden, wenn man g_1^0 an den Geraden g_2^0 und g_3^0 spiegelt; bei der ersten Spiegelung gehe $u_1'^0$ in $\mathfrak{v}'^0$ und $u_1''^0$ in $\mathfrak{v}''^0$, bei der zweiten $u_1'^0$ in $\mathfrak{w}'^0$ und $u_1''^0$ in $\mathfrak{w}''^0$ über. Wir verbinden nun $u_1'^0$ mit $\mathfrak{v}'^0$, $u_1''^0$ mit $\mathfrak{w}''^0$, $\mathfrak{v}''^0$ mit $\mathfrak{w}'^0$. Die drei so erhaltenen Geraden bilden ein Dreieck $\mathfrak{a}^0\,\mathfrak{b}^0\,\mathfrak{c}^0$, das, wenn die Abstände l_2^0 und l_3^0 klein genug gewählt waren, ein Teil des von g_1^0, $u_1'^0\,\mathfrak{v}'^0$ und $u_1''^0\,\mathfrak{w}''^0$ gebildeten Dreiecks ist; (die Richtigkeit dieser Behauptung erkennt man zunächst unmittelbar an einer Figur, in der g_2^0 durch $u_1''^0$ und g_3^0 durch $u_1'^0$ geht, der allerdings keine C-K-Fläche entspricht, aus der aber durch stetige Lagenänderung von g_2^0 und g_3^0 unendlich viele für unsern Zweck geeignete Figuren hervorgehen, in denen das Innere des Dreiecks $\mathfrak{a}^0\,\mathfrak{b}^0\,\mathfrak{c}^0$ noch wie in der Hilfsfigur, von der wir die stetige Änderung ihren Ausgang nehmen ließen, durch die Gerade $\mathfrak{v}''^0\,\mathfrak{w}'^0$ von g_1^0 getrennt ist). Jede Gerade, die einen Punkt mit dem Dreiecksbereich $\mathfrak{a}^0\,\mathfrak{b}^0\,\mathfrak{c}^0$ gemein hat, schneidet eine der Geraden g_1^0, $\mathfrak{v}'^0\,\mathfrak{v}''^0$ oder $\mathfrak{w}'^0\,\mathfrak{w}''^0$, die Spur jeder derartigen Geraden läuft also in wenigstens einer Richtung in den Außenteil hinaus. Wieder häufen sich aber an den Seiten des Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, da diese (offene) Binnengeraden sind, geschlossene Geraden (Fig. 10).

---

[13]) Diss. S. 25 ff.

Da jede Binnenstrecke, d. h. jede einer Binnengeraden angehörende Strecke Häufungslage von Strecken ist, die auf geschlossenen Geraden liegen [14]), so folgt, daß jeder der im vorstehenden konstruierten, von geschlossenen Geraden gemiedenen Bereiche durch Wegnahme seiner Randpunkte zu einem Gebiet wird, das mit keiner Binnengeraden einen Punkt gemein hat.

Es ist auffallend, daß alle bis jetzt in Binnenteilen von offenen C-K-Flächen positiver Charakteristik gefundenen Gebiete, von denen die Binnengeraden ausgeschlossen sind, Dreiecksgebiete waren. Es drängt sich die Frage auf, ob dies so sein muß; eine Antwort ist hierauf noch nicht gegeben.

Für die Gewinnung einer Übersicht über den Verlauf der geschlossenen Geraden im Binnenteil einer offenen C-K-Fläche mit positiver Charakteristik wäre es wichtig, alle Bereiche zu finden, in die keine solche Gerade eindringen kann; aber auch für die Lösung dieser Aufgabe ist leider noch kein Weg zu sehen.

---

[14]) Siehe die in Anmerkung [1]) zitierte Arbeit S. 589 ff.

Eingegangen 12. Januar 1929.

Eine Anwendung der Kontinuumhypothese in der Algebra[1]).

Von *Reinhold Baer* in Halle a. S.

Sei $\mathfrak{k}$ ein beliebiger Körper, $\mathfrak{N}$ algebraisch und normal über $\mathfrak{k}$; d. h. ein irreduzibles Polynom aus $\mathfrak{k}$, das in $\mathfrak{N}$ eine Nullstelle hat, zerfällt in $\mathfrak{N}$ in Linearfaktoren [z. B. kann $\mathfrak{N}$ algebraisch abgeschlossen angenommen werden].

Ist dann $\mathfrak{Z}$ ein Körper zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{N}$, so verstehen wir unter einer $\mathfrak{Z}$ *erzeugenden Körperkette* $\mathfrak{k}_\nu$ (ν endliche oder unendliche Ordinalzahl), $0 \leqq \nu \leqq \sigma$, das Folgende:

1. $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}$.
2. $\mathfrak{k}_{\nu+1}$ ist eine einfache Erweiterung von $\mathfrak{k}_\nu$: $\mathfrak{k}_{\nu+1} = \mathfrak{k}_\nu(a_\nu)$.
3. Ist ν Limeszahl, so ist $\mathfrak{k}_\nu$ die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{k}_\mu$ mit $0 \leqq \mu < \nu$.
4. $\mathfrak{k}_\sigma = \mathfrak{Z}$.

Die Existenz solcher erzeugenden Körperketten für alle $\mathfrak{Z}$ ist mit Hilfe des Wohlordnungssatzes und transfiniter Induktion leicht zu zeigen.

Satz: *Ist $\mathfrak{Z}$ unendlich und von 1. Art über $\mathfrak{k}$, d. h. haben irreduzible Polynome aus $\mathfrak{k}$, die in $\mathfrak{Z}$ Nullstellen haben, nur einfache Nullstellen [in $\mathfrak{N}$], und gilt die verallgemeinerte Cantorsche Kontinuumhypothese:*

$$2^{\aleph_\nu} = \aleph_{\nu+1},$$

so haben irgend zwei $\mathfrak{Z}$ erzeugende Körperketten [als Mengen von Körpern] gleiche Mächtigkeit.

Dem Beweis schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:

(a) *Ist M die Mächtigkeit einer $\mathfrak{Z}$ erzeugenden Körperkette, so erfüllt die Mächtigkeit A der Menge der verschiedenen Isomorphismen von $\mathfrak{Z}$, die durch $\mathfrak{k}$ elementweise invariant lassende Automorphismen von $\mathfrak{N}$ induziert werden, die Gleichung:*

$$A = 2^M.$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes folgt aus der Tatsache, daß irgendein Isomorphismus Π_ν von $\mathfrak{k}_\nu$ sich auf genau $[\mathfrak{k}_{\nu+1}: \mathfrak{k}_\nu]$ [2]) verschiedene Weisen zu einem Isomorphismus von $\mathfrak{k}_{\nu+1}$ erweitern läßt. Da nämlich stets $[\mathfrak{k}_{\nu+1}: \mathfrak{k}_\nu] \geqq 2$ und endlich ist, so folgt hieraus nach dem Multiplikationssatz für die Körpergrade zunächst:

$$2^M \leqq A \leqq \aleph_0^M,$$

und hieraus, sowie aus dem Satze, daß für $\aleph_\alpha \leqq \aleph_\beta$ auch $2^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ ist, folgt unser Hilfssatz (a). [M ist ja nach der im Satz gemachten Voraussetzung unendlich, also von der Form $\aleph_\beta$].

---

[1]) Eine etwas ausführlichere Darstellung des Inhaltes dieser Note wird in dem Anhang „Abriß der Galoisschen Theorie" zu dem Neudruck von Steinitz' großer Körperabhandlung aus Crelle 137 gegeben.

[2]) $[\mathfrak{k}_{\nu+1}: \mathfrak{k}_\nu]$ ist der Grad von $\mathfrak{k}_{\nu+1}$ über $\mathfrak{k}_\nu$, also auch der Grad der irreduziblen Gleichung, der a_ν in $\mathfrak{k}_\nu$ genügt.

Haben wir jetzt zwei $\mathfrak{Z}$ erzeugende Körperketten der Mächtigkeiten $\aleph_\alpha$ bzw. $\aleph_\beta$, so folgt aus dem Hilfssatz (a):

$$A = 2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\beta}.$$

Dann folgt aus der verallgemeinerten Cantorschen Kontinuumhypothese, daß $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\beta+1}$, d. h. $\aleph_\alpha = \aleph_\beta$ ist, womit unser Satz bewiesen ist.

Aus $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\beta}$ direkt auf $\aleph_\alpha = \aleph_\beta$ zu schließen, ist bisher noch nicht gelungen; vgl. *W. Sierpinski*, Sur l'hypothèse du continu, Fund. Math. 5 (1924), S. 177—187.

Gries i. Sellrain, den 23. VIII. 1929.

Eingegangen 25. August 1929.

Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols.

Von *Helmut Hasse* in Halle.

Im Anschluß an den Artinschen Beweis [1]) des Reziprozitätsgesetzes für beliebige Abelsche Körper K über beliebigen algebraischen Zahlkörpern k war es mir gelungen [2]), die Theorie des Normenrestsymbols eines beliebigen Exponenten m in jedem die m-ten Einheitswurzeln enthaltenden algebraischen Zahlkörper k zu entwickeln. Ich legte dabei denjenigen Weg zugrunde, der in den auf Primzahlexponenten l bezüglichen Arbeiten von *Hilbert*, *Furtwängler* und *Takagi* [3]) vorgezeichnet war.

Ein Nachteil bei diesem Wege besteht darin, daß die Normenrestsymbole für die Primteiler l des Exponenten m und für die unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_\infty$ auf eine durchaus andere Art behandelt werden müssen, als die Normenrestsymbole für die nicht in m aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$. Dadurch und durch die vielen auf diesem Wege erforderlichen formalen Rechnungen und Umformungen bedingt, läßt dieser Aufbau der Normenresttheorie an Einfachheit und Übersichtlichkeit sehr zu wünschen übrig.

Ein weiterer Nachteil liegt noch in dem Umstand, daß man das gruppentheoretisch formulierte, Artinsche Reziprozitätsgesetz nicht im Grundkörper k sondern in gewissen Erweiterungskörpern von k anwenden muß, um das in klassischer Weise, mit dem m-ten Potenzrestsymbol formulierte Reziprozitätsgesetz zu erhalten, das man dann für den in Rede stehenden Aufbau der Normenresttheorie braucht. Dieser letztere Nachteil macht sich z. B. geltend, wenn man in der Theorie der Abelschen Körper über dem rationalen oder über einem imaginär-quadratischen Grundkörper k das Artinsche Reziprozitätsgesetz mit funktionentheoretischen Mitteln hergeleitet hat, und wenn man nun, im Rahmen dieser Theorie bleibend, ohne Heranziehung weiterer Hilfsmittel zu Reziprozitätsaussagen des klassischen Typus übergehen will [4]).

Ich gebe im folgenden eine neue, von diesen Nachteilen freie Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols, die sich zu der bisherigen Theorie sachlich und methodisch ebenso verhält, wie das Artinsche Reziprozitätsgesetz zum klassischen. Ich entwickle also die Theorie gleich für beliebige Abelsche Körper K über

---

[1]) *E. Artin*, Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg **5** (1927). — Im folgenden zitiert mit A.

[2]) *H. Hasse*, Über das Reziprozitätsgesetz der m-ten Potenzreste, ds. Journ. **158** (1927). — Im folgenden zitiert mit H. — Die Kenntnis dieser Arbeit ist für das Verständnis der vorliegenden Arbeit nicht erforderlich.

[3]) Siehe die Literaturangaben in der Einleitung des Teils I meines „Berichts", Jahresber. d. D. M.-V. **35** (1926). — Diesen zitiere ich im folgenden mit B. I, seine ebenda **36** (1927) als Teil Ia erschienene Fortsetzung mit B. I a.

[4]) Siehe dazu *R. Fueter*, Reziprozitätsgesetze in quadratisch-imaginären Körpern, 1. und 2. Mitteilung, Gött. Nachr. 1927, insbesondere die Einleitung der 2. Mitteilung.

beliebigen algebraischen Zahlkörpern k, und zwar in direktem Anschluß an das Artinsche Reziprozitätsgesetz, unter Verwendung einer ganz analogen einfachen und durchsichtigen gruppentheoretischen Einkleidung.

Diese Einkleidung macht es möglich, alle Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$ und Primstellen $\mathfrak{p}_\infty$ gleichmäßig so zu behandeln, wie in der bisherigen Theorie die endlich vielen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{p}_\infty$, also gerade umgekehrt wie in einigen früheren Arbeiten von mir [1]), in denen ich — mit unvollständigem Erfolg — versuchte, die $\mathfrak{l}$ nach dem von den $\mathfrak{p}$ her geläufigen Schema zu behandeln.

Das in klassischer Weise formulierte Reziprozitätsgesetz brauche ich nicht heranzuziehen. Im Gegenteil, meine Begründung der Normenresttheorie liefert in einfachster Weise den Übergang von der Artinschen zur klassischen Formulierung des Reziprozitätsgesetzes, bei festem Grundkörper k.

Weitere Anwendungen auf die Normenresttheorie, sowie auch auf die Theorie der Verzweigungskörper und auf den Zusammenhang zwischen Führer und Diskriminante relativ-Abelscher Zahlkörper lasse ich in zwei anschließenden Arbeiten folgen.

Es erscheint mir für die Folge zweckmäßig, im Zusammenhang mit dem Artinschen Reziprozitätsgesetz die folgende Benennung und Bezeichnung einzuführen, die sich auf einen über dem Grundkörper k Abelschen Körper K bezieht:

Das **einfache Artin-Symbol** $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ für die einem Primideal $\mathfrak{p}$ aus k, das nicht in der Diskriminante von K/k aufgeht, auf Grund der Relation:

$$\mathsf{A}^{N(\mathfrak{p})} \equiv \sigma\mathsf{A} \text{ mod. } \mathfrak{p} \text{ für jedes ganze } \mathsf{A} \text{ aus } K$$

zugeordnete Substitution σ von K/k.

Das **(zusammengesetzte) Artin-Symbol** $\left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right)^{b_1} \cdots \left(\frac{K}{\mathfrak{p}_r}\right)^{b_r}$, wenn $\mathfrak{b}$ ein zur Diskriminante von K/k primes Ideal aus k mit der Primidealpotenzzerlegung $\mathfrak{p}_1^{b_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{b_r}$ ist [2]).

Das Artinsche Reziprozitätsgesetz besagt, daß das Artin-Symbol $\left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right)$ nur von der Klasse abhängt, der $\mathfrak{b}$ nach der K durch die Klassenkörperbeziehung zugeordneten Idealgruppe H in k angehört.

§ 1. Theorie des Normenrestsymbols für einen beliebigen Abelschen Körper K über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper k.

Für jede Primstelle [3]) $\mathfrak{p}$ von k definiere ich im Bereich aller Zahlen $\beta \neq 0$ aus k ein Symbol $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ auf folgende Weise:

---

[1]) *H. Hasse*: Zur Theorie des quadratischen Hilbertschen Normenrestsymbols in algebraischen Körpern, ds. Journ. **153** (1924); Zur Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern, ebenda **153** (1924) und **154** (1925); Direkter Beweis des Zerlegungs- und Vertauschungssatzes für das Hilbertsche Normenrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper im Falle eines Primteilers $\mathfrak{l}$ des Relativgrades l, ebenda **154** (1925).

[2]) Allgemeiner kann man noch zulassen, daß $\mathfrak{b}$ Primteiler $\mathfrak{p}$ der Diskriminante von K/k enthält, aber nur mit solchen Exponenten b, die durch den Grad von K/k teilbar sind; diese Primteiler sollen dann zu $\left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right)$ den Beitrag 1 liefern.

[3]) Unter der gemeinsamen Bezeichnung „Primstellen" fasse ich die Primideale (endlichen Primstellen) und die unendlichen Primstellen im Sinne von B. Ia, § 2 zusammen.

Es sei $\mathfrak{f}$ der Führer [1]) der K zugeordneten Idealgruppe H in k und $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ der Beitrag von $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{f}$. Zu der vorgegebenen Zahl β werde eine Hilfszahl β_0 mit den Eigenschaften

$$\beta_0 \equiv \beta \bmod. \mathfrak{f}_\mathfrak{p}, \qquad \beta_0 \equiv 1 \bmod. \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}} \text{ [2])}$$

bestimmt. Für diese Hilfszahl β_0 werde die eindeutige Zerlegung

$$\beta_0 = \mathfrak{p}^b \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} \text{ prim zu } \mathfrak{p} \text{ [3])}$$

angesetzt. Offenbar ist b auch der genaue Exponent, zu dem $\mathfrak{p}$ in β steckt. Das Ideal $\mathfrak{b}$ ist prim zu $\mathfrak{f}$, oder also — was dasselbe besagt — zur Diskriminante von K/k. Ich definiere dann das Symbol $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ als das Artin-Symbol $\left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right)$:

$$\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right).$$

Diese Definition ist zunächst unabhängig von der Wahl der Hilfszahl β_0. Zwei zu β gehörige Hilfszahlen β_0, β_0' sind nämlich mod. $\mathfrak{f}$ kongruent, die zugeordneten Ideale $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ also — wegen der invarianten Bedeutung des Exponenten b — nach dem Strahl mod. $\mathfrak{f}$ äquivalent, und somit in derselben Klasse nach H gelegen. Dann ist aber $\left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{b}'}\right)$ nach dem Artinschen Reziprozitätsgesetz.

Ich leite nun die hauptsächlichsten Eigenschaften des Symbols $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ her.

Satz 1. *$\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ ist Charakter der Gruppe aller Zahlen $\beta \neq 0$ aus k, d. h. es gilt:*

$$\left(\frac{\beta_1 \beta_2^{\pm 1}, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta_1, K}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\beta_2, K}{\mathfrak{p}}\right)^{\pm 1}.$$

Beweis: Gehört

$$\beta_{10} = \mathfrak{p}^{b_1}\mathfrak{b}_1 \text{ zu } \beta_1, \qquad \beta_{20} = \mathfrak{p}^{b_2}\mathfrak{b}_2 \text{ zu } \beta_2$$

als Hilfszahl in obigem Sinne, so kann in gleichem Sinne

$$\beta_{10}\beta_{20}^{\pm 1} = \mathfrak{p}^{b_1 \pm b_2}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2^{\pm 1} \text{ zu } \beta_1\beta_2^{\pm 1}$$

als Hilfszahl gewählt werden. Aus der Definition des Artin-Symbols folgt aber unmittelbar:

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2^{\pm 1}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{b}_1}\right)\left(\frac{K}{\mathfrak{b}_2}\right)^{\pm 1}.$$

---

[1]) Es ist der in B. Ia, § 6 mit $\tilde{\mathfrak{f}}$ bezeichnete Führer gemeint, in den auch gewisse unendliche Primstellen aufgenommen sind. Der Einfachheit halber lasse ich in der vorliegenden Arbeit das in B. Ia zur Kennzeichnung solcher „unendlicher" Moduln verwendete Zeichen: ~ fort.

[2]) Die Kongruenz ist in der vorliegenden Arbeit durchweg in dem in B. I a, § 3 näher erläuterten „multiplikativen" Sinne zu verstehen. Im Falle $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} \neq 1$ bedeutet also die erstere der obigen Kongruenzen: $\frac{\beta_0}{\beta}$ ist prim zu $\mathfrak{p}$ und $\equiv 1$ mod. $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ im gewöhnlichen Sinne. Zudem sei festgesetzt, daß sie im Falle $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = 1$ bedeutet: $\frac{\beta_0}{\beta}$ ist prim zu $\mathfrak{p}$.

[3]) Im Falle einer unendlichen Primstelle $\mathfrak{p}$ ist $\beta_0 = \mathfrak{b}$ gemeint, indem dann, wie in B. Ia, § 2 definiert wurde, alle $\mathfrak{b} \neq 0$ prim zu $\mathfrak{p}$ heißen.

Satz 2. *Wenn $\mathfrak{p}$ nicht in $\mathfrak{f}$ enthalten ist und in β genau zum Exponenten b aufgeht, so ist $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ die $(-b)$-te Potenz des einfachen Artin-Symbols $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$:*

$$\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^{-b}.$$ [1])

Ist also insbesondere $\mathfrak{p}$ weder in $\mathfrak{f}$ noch in β enthalten, so ist

$$\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Beweis: Es ist dann $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = 1$, und daher $\beta_0 = \mathfrak{p}^b\mathfrak{b} \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$, also $\left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}^b}\right)^{-1} = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^{-b}$.

Satz 3. *Es gilt die Produktformel:*

$$\prod_\mathfrak{p} \left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

in der das Produkt über alle Primstellen $\mathfrak{p}$ von k zu erstrecken ist.

Beweis: Nach Satz 5 ist $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ höchstens für die endlich vielen Primstellen $\mathfrak{p}_i$, die in $\mathfrak{f}$ oder β enthalten sind, von 1 verschieden. Sei nun für diese $\mathfrak{p}_i$

$$\beta_{0i} \equiv \beta \bmod \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_i}, \qquad \beta_{0i} \equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_i}},$$

$$\beta_{0i} = \mathfrak{p}_i^{b_i}\mathfrak{b}_i, \qquad \mathfrak{b}_i \text{ prim zu } \mathfrak{p}_i.$$

Dann ist nach dem Fundamentalsatz der Idealtheorie einerseits:

$$\mathfrak{f} = \prod_i \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_i},$$

also

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_i}} = \prod_{j \neq i} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_j},$$

andererseits

$$\beta = \prod_i \mathfrak{p}_i^{b_i},$$

also

$$\prod_i \mathfrak{b}_i = \frac{\prod_i \beta_{0i}}{\beta} \equiv \frac{\prod_i \beta_{0i}}{\beta_{0j}} \equiv \frac{\beta_{0j}}{\beta_{0j}} \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_j} \text{ für alle } j,$$

und somit

$$\prod_i \mathfrak{b}_i \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}.$$

Dann ist aber nach dem Artinschen Reziprozitätsgesetz

$$\prod_i \left(\frac{K}{\mathfrak{b}_i}\right) = 1.$$

Satz 4. *Ist β Normenrest mod. $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ von K, so ist $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$.*

Beweis: Ist

$$\beta \equiv \mathsf{N}(\mathsf{B}) \bmod \mathfrak{f}_\mathfrak{p}, \quad \mathsf{B} \text{ in } K,$$

---

[1]) Im Falle einer unendlichen Primstelle $\mathfrak{p}$, wo das einfache Artin-Symbol nicht definiert ist, ist (gemäß S. 136, Anm. 3) $b = 0$ gemeint, so daß die rechte Seite 1 bedeuten soll.

und wird eine Hilfszahl B_0 in K mit den Eigenschaften

$$\mathsf{B}_0 \equiv \mathsf{B} \mod \mathfrak{f}_\mathfrak{p}, \qquad \mathsf{B}_0 \equiv 1 \mod \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$$

gewählt, so ist

$$\beta_0 \equiv \mathsf{N}(\mathsf{B}_0) \mod \mathfrak{f}.$$

Wird ferner auch für B_0 die eindeutige Zerlegung

$\mathsf{B}_0 = \mathfrak{Q}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Q}$ nur aus Primteilen $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ zusammengesetzt, $\mathfrak{B}$ prim zu $\mathfrak{p}$ angesetzt, so muß

$$\mathsf{N}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{p}^b$$

sein, weil $\frac{\beta_0}{\mathsf{N}(\mathsf{B}_0)}$ prim zu $\mathfrak{p}$ ist. Damit folgt:

$$\mathfrak{b} = \frac{\beta_0}{\mathfrak{p}^b} \equiv \frac{\mathsf{N}(\mathsf{B}_0)}{\mathsf{N}(\mathfrak{Q})} = \mathsf{N}(\mathfrak{B}) \mod \mathfrak{f}.$$

Hiernach gehört $\mathfrak{b}$ zu H, und daher ist $\left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right) = 1$.

Satz 5. *Ist* $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, *so ist* β *Normenrest mod.* $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ *von* K, *und auch Normenrest von* K *mod. jeder noch so hohen Potenz* $\mathfrak{p}^r$ *von* $\mathfrak{p}$ [1]).

Beweis: Es sei $\mathfrak{p}^r$ irgendeine $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ enthaltende Potenz von $\mathfrak{p}$, und es bezeichne N_r die Gruppe der Normenreste mod. $\mathfrak{p}^r$ von K. Ferner bezeichne X die Gruppe (gemäß Satz 1 ist es eine) der β mit $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$. Nach Satz 4 gilt dann jedenfalls $N_r \leqq X$.

Für über k vom Primzahlgrad l zyklische Körper K folgt nun aus der Takagischen Theorie der primen Normenreste [2]) leicht, daß die hier betrachtete Gruppe N_r aller Normenreste (auch der nicht-primen!) in der Gruppe der von Null verschiedenen Zahlen aus k den Index 1 oder l hat, je nachdem $\mathfrak{p}$ in K in verschiedene Primstellen ersten Relativgrades zerfällt oder nicht. Daraus ergibt sich durch sukzessive zyklische Erweiterung von Primzahlgrad (den Zerlegungskörper K_Z zu $\mathfrak{p}$ für K/k als Zwischenstufe benutzend), daß für beliebige über k Abelsche Körper K die Gruppe N_r höchstens den Index ef hat, wenn $\mathfrak{p}$ in K in e-te Potenzen verschiedener Primstellen f-ten Relativgrades zerfällt. M. a. W. der Index von N_r ist höchstens gleich der Ordnung der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{G}_Z$ zu $\mathfrak{p}$ für K/k.

Um die Behauptung $X \leqq N_r$ zu beweisen, genügt es daher zu zeigen, daß zu jeder Substitution σ aus $\mathfrak{G}_Z$ ein β mit $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = \sigma$ existiert. Denn dann folgt, daß X mindestens den Index ef hat, und aus $N_r \leqq X$ ergibt sich $X = N_r$, sowie beiläufig die — in anderem Zusammenhang wichtige — Tatsache:

Zusatz zu Satz 5. *Der Wertevorrat von* $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ *ist genau die Zerlegungsgruppe zu* $\mathfrak{p}$.

Zur Vollendung des Beweises betrachte ich die folgenden, auf Grund der Galoisschen Theorie, der Klassenkörpertheorie und des Artinschen Reziprozitätsgesetzes einander zugeordneten

---

[1]) Für eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}$ ist natürlich nur $r = 1$ gemeint.

[2]) Siehe etwa B. Ia, § 10.

Substitutionsgruppen	Zerlegungsgruppe $\mathfrak{G}_Z$	f	Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$	e	identische Gruppe	1
Körper	Zerlegungskörper K_Z	f	Trägheitskörper K_T	e	voller Körper	K
Idealgruppen	H_Z	f	H_T	e		H

wobei die zwischengesetzten Zahlen f und e den Index bzw. Relativgrad angeben.

Sei nun eine beliebige Substitution σ aus $\mathfrak{G}_Z$ vorgegeben. Dann sei $\mathfrak{b}'$ irgendein Ideal aus der zugeordneten, zu H_Z gehörigen Klasse nach H, so daß also

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{b}'}\right) = \sigma$$

ist.

Wenn $\mathfrak{p}$ zunächst eine endliche Primstelle (Primideal) ist, so liegt nach dem Zerlegungssatz der Klassenkörpertheorie $\mathfrak{p}$ in H_Z, aber erst $\mathfrak{p}'$ in H_T. Da H_Z/H_T wie $\mathfrak{G}_Z/\mathfrak{G}_T$ zyklisch von der Ordnung f ist, existiert also eine Potenz $\mathfrak{p}^b$ derart, daß $\mathfrak{p}^b\mathfrak{b}'$ in H_T liegt. Es handelt sich jetzt weiter darum, das Ideal $\mathfrak{b}'$ in seiner Klasse nach H so zu einem Ideal $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'\mathfrak{h}$ zu normieren, daß

$$\mathfrak{p}^b\mathfrak{b} = \mathfrak{p}^b\mathfrak{b}'\mathfrak{h} = \beta \equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$$

wird. Denn dann ist nach Konstruktion

$$\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{b}'}\right) = \sigma,$$

wie verlangt.

Nun ist, wenn $\mathfrak{p}$ zunächst weiter eine endliche Primstelle ist, H_T die engste H enthaltende Idealgruppe mit $\mathfrak{p}$ nicht enthaltendem Führer[1]). H_T ist also sicher mod. $\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$ erklärbar, d. h. enthält den Strahl S mod. $\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$. Da somit das Kompositum HS eine Idealgruppe im „Intervall" $H_T \geqq HS \geqq H$ mit $\mathfrak{p}$ nicht enthaltendem Führer ist, folgt also $HS = H_T$. Daher läßt sich das Ideal $\mathfrak{p}^b\mathfrak{b}'$ aus H_T als Produkt eines Ideals $\mathfrak{h}^{-1}$ aus H und einer Zahl β aus S darstellen, was die erforderliche Normierung $\mathfrak{p}^b\mathfrak{b}'\mathfrak{h} = \beta \equiv \bmod \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$ ergibt.

Wenn $\mathfrak{p}$ eine unendliche Primstelle ist, so ist $e = 1$, $G_T = 1$, $K_T = K$, $H_T = H$. In der vorhergehenden Betrachtung ist dann $\mathfrak{p}^b$ durch 1 zu ersetzen, und es handelt sich jetzt darum, das Ideal $\mathfrak{b}'$ aus H_Z in seiner Klasse nach H so zu $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'\mathfrak{h}$ zu normieren, daß

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'\mathfrak{h} = \beta \equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$$

wird. Das ist aber nach einem entsprechenden Schluß wie zuvor möglich, weil hier offenbar H_Z die engste H enthaltende Idealgruppe mit $\mathfrak{p}$ nicht enthaltendem Führer ist[2]).

Satz 9. *Ist τ ein beliebiger Isomorphismus von k, so gilt:*

$$\left(\frac{\tau\beta, \tau K}{\tau\mathfrak{p}}\right) = \tau\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)\tau^{-1}.$$[3])

---

[1]) B. I, § 7, Satz 12.

[2]) Siehe dazu B. Ia, § 6, Satz 2.

[3]) Die rechte Seite ist eine eindeutig bestimmte Substitution (Automorphismus) von $\tau K/\tau k$. Denn be-

Beweis: Unterwirft man die Bildungsvorschrift für

$$\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right)$$

dem Isomorphismus τ, so resultiert

$$\left(\frac{\tau\beta, \tau K}{\tau\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\tau K}{\tau\mathfrak{b}}\right).$$

Daraus folgt die Behauptung, weil ein entsprechender Satz für das einfache und somit für das zusammengesetzte Artin-Symbol gilt [1]).

Satz 7. *Ist K' ein Teilkörper von K über k, so ist $\left(\frac{\beta, K'}{\mathfrak{p}}\right)$ die durch $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ gelieferte Substitution von K'/k.*

Beweis: Die K' durch die Klassenkörperbeziehung zugeordnete Idealgruppe H' in k enthält H und hat somit einen Teiler $\mathfrak{f}'$ von $\mathfrak{f}$ zum Führer. Hiernach ist eine für die Bildung von $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ geeignete Hilfszahl β_0 auch als Hilfszahl für die Bildung von $\left(\frac{\beta, K'}{\mathfrak{p}}\right)$ geeignet. Daraus folgt die Behauptung, weil ein entsprechender Satz für das einfache und somit für das zusammengesetzte Artin-Symbol gilt [2]).

Satz 8. *Sind K_1 und K_2 über k Abelsche Körper, und wird festgesetzt, daß die Substitutionen von K_1/k den Körper K_2 und die Substitutionen von K_2/k den Körper K_1 elementweise ungeändert lassen sollen, so gilt für das Kompositum K_1K_2:*

$$\left(\frac{\beta, K_1K_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta, K_1}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\beta, K_2}{\mathfrak{p}}\right). \text{ [3])}$$

Beweis: Bei der getroffenen Festsetzung ist die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K_1K_2/k eine gewisse Untergruppe des direkten Produkts der Galoisschen Gruppen $\mathfrak{G}_1$ von K_1/k und $\mathfrak{G}_2$ von K_2/k. Wird dementsprechend

$$\left(\frac{\beta, K_1K_2}{\mathfrak{p}}\right) = \sigma_1\sigma_2$$

mit σ_1 aus $\mathfrak{G}_1$, σ_2 aus $\mathfrak{G}_2$ angesetzt, so folgt nach Satz 7, daß

$$\left(\frac{\beta, K_1}{\mathfrak{p}}\right) = \sigma_1, \quad \left(\frac{\beta, K_2}{\mathfrak{p}}\right) = \sigma_2$$

ist.

Satz 9. *Es sei k^* ein beliebiger Teilkörper von k, ferner K^* ein über k^* Abelscher Körper und $K = kK^*$. Ist dann $\mathfrak{p}^*$ eine Primstelle von k^* und durchläuft $\mathfrak{p}$ alle in $\mathfrak{p}^*$ enthaltenen Primstellen von k, so gilt für die Zahlen β aus k:*

$$\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}^*} \left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mathsf{N}_{kk^*}(\beta), K^*}{\mathfrak{p}^*}\right).$$

---

kanntlich läßt sich jeder Isomorphismus τ von k zu einem Isomorphismus von K/k erweitern, und dieser ist bestimmt bis auf willkürliche vorherige (als Faktoren: hintere) Automorphismen von K/k und willkürliche nachherige (als Faktoren: vordere) Automorphismen von $\tau K/\tau k$.

[1]) A., S. 365 erster Absatz. — Das „konjugiert" dort darf ohne weiteres in dem hier gemeinten allgemeinsten Sinne verstanden werden.

[2]) A., S. 356 dritter Absatz.

[3]) Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß K_1 und K_2 nicht als teilerfremd über K vorausgesetzt zu werden brauchen, wie es in A., S. 356 letzter Absatz bei dem entsprechenden Satz für das einfache Artin-Symbol

Beweis: Wie ich an anderer Stelle ausführe [1]), ist der Führer $\mathfrak{f}$ für K/k im Führer $\mathfrak{f}^*$ für K^*/k^* enthalten. Daher kann $\mathfrak{f}^*$ in der Rolle von $\mathfrak{f}$ bei der Bildung von $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ verwendet werden.

Ist

$$\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}^e \mathfrak{p}'^{e'} \cdots,$$

so mögen demgemäß Hilfszahlen $\beta_0, \beta_0', \ldots$ mit den Eigenschaften

$$\beta_0 \equiv \beta \bmod \mathfrak{f}^*_{\mathfrak{p}}, \quad \beta_0 \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}^*_{\mathfrak{p}'}, \ldots; \quad \beta_0 \equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}^*}{\mathfrak{f}^*_{\mathfrak{p}^*}}$$

$$\beta_0' \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}^*_{\mathfrak{p}}, \quad \beta_0' \equiv \beta \bmod \mathfrak{f}^*_{\mathfrak{p}'} \ldots; \quad \beta_0' \equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}^*}{\mathfrak{f}^*_{\mathfrak{p}^*}}$$

. . . . . .

bestimmt und dann

$$\beta_0 = \mathfrak{p}^b \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} \text{ prim zu } \mathfrak{p}$$
$$\beta_0' = \mathfrak{p}^{b'} \mathfrak{b}', \quad \mathfrak{b}' \text{ prim zu } \mathfrak{p}'$$
. . . . . .

gesetzt werden. Dann ist

$$\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right), \qquad \left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{b}'}\right), \ldots$$

Ferner folgt aus obigen Relationen zunächst:

$$\beta_0 \beta_0' \cdots \equiv \beta \bmod \mathfrak{f}^*_{\mathfrak{p}^*}, \qquad \beta_0 \beta_0' \cdots \equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}^*}{\mathfrak{f}^*_{\mathfrak{p}^*}},$$
$$\beta_0 \beta_0' \cdots = \mathfrak{p}^b \mathfrak{p}'^{b'} \cdots \mathfrak{b}\mathfrak{b}' \cdots, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{b}' \cdots \text{ prim zu } \mathfrak{p}^*$$

und daraus weiter:

$$N_{kk^*}(\beta_0 \beta_0' \cdots) \equiv N_{kk^*}(\beta) \bmod \mathfrak{f}^*_{\mathfrak{p}^*}, \quad N_{kk^*}(\beta_0 \beta_0' \cdots) \equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}^*}{\mathfrak{f}^*_{\mathfrak{p}^*}},$$
$$N_{kk^*}(\beta_0 \beta_0' \cdots) = \mathfrak{p}^{*b^*} N_{kk^*}(\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \cdots), \quad N_{kk^*}(\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \cdots) \text{ prim zu } \mathfrak{p}^*.$$

Hiernach ist $N_{kk^*}(\beta_0 \beta_0' \cdots)$ als Hilfszahl zur Bildung von $\left(\frac{N_{kk^*}(\beta), K^*}{\mathfrak{p}^*}\right)$ geeignet, und es ergibt sich:

$$\left(\frac{N_{kk^*}(\beta), K^*}{\mathfrak{p}^*}\right) = \left(\frac{K^*}{N_{kk^*}(\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \cdots)}\right) = \left(\frac{K^*}{N_{kk^*}(\mathfrak{b})}\right)\left(\frac{K^*}{N_{kk^*}(\mathfrak{b}')}\right) \cdots.$$

Daraus folgt die Behauptung, weil für das Artin-Symbol gilt:

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{K^*}{N_{kk^*}(\mathfrak{b})}\right), \quad \left(\frac{K}{\mathfrak{b}'}\right) = \left(\frac{K^*}{N_{kk^*}(\mathfrak{b}')}\right), \ldots [2]).$$

---

geschieht. Auch dort ist übrigens diese Voraussetzung ohne weiteres entbehrlich, so daß allgemein für das Artin-Symbol gilt: $\left(\frac{K_1 K_2}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{K_1}{\mathfrak{b}}\right)\left(\frac{K_2}{\mathfrak{b}}\right)$. Vgl. dazu auch schon H., S. 236 erster Absatz.

[1]) *H. Hasse*, Ein Satz über relativ-Galoissche Zahlkörper und seine Anwendung auf relativ-Abelsche Zahlkörper, Math. Zeitschr. **31** (1930).

[2]) Der Beweis ergibt sich durch auf der Hand liegende Verallgemeinerung des in H., S. 239 f. geführten Beweises.

§ 2. Anwendung auf das Reziprozitätsgesetz der m-ten Potenzreste in einem die m-ten Einheitswurzeln enthaltenden algebraischen Zahlkörper k.

Ich definiere das Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ für eine beliebige Primstelle $\mathfrak{p}$ von k und beliebige Zahlen $\alpha, \beta \neq 0$ aus k als denjenigen Einheitswurzelfaktor, den die Zahl $\sqrt[m]{\alpha}$ bekommt, wenn man auf sie die Substitution $\left(\frac{\beta, k(\sqrt[m]{\alpha})}{\mathfrak{p}}\right)$ anwendet:

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \frac{\left(\frac{\beta, k(\sqrt[m]{\alpha})}{\mathfrak{p}}\right)\sqrt[m]{\alpha}}{\sqrt[m]{\alpha}}.$$

Ganz analog hatte ich in H. das spezielle m-te (dem Legendre-Symbol analoge) Potenzrestsymbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ auf Artinscher Grundlage als denjenigen Einheitswurzelfaktor definiert, den $\sqrt[m]{\alpha}$ bei Anwendung der Substitution $\left(\frac{k(\sqrt[m]{\alpha})}{\mathfrak{p}}\right)$ bekommt:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \frac{\left(\frac{k(\sqrt[m]{\alpha})}{\mathfrak{p}}\right)\sqrt[m]{\alpha}}{\sqrt[m]{\alpha}},$$

und entsprechend läßt sich das allgemeine (dem Jacobi-Symbol analoge) m-te Potenzrestsymbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)_m$ auf Artinscher Grundlage definieren:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)_m = \frac{\left(\frac{k(\sqrt[m]{\alpha})}{\mathfrak{b}}\right)\sqrt[m]{\alpha}}{\sqrt[m]{\alpha}}.$$

Aus den in § 1 bewiesenen Sätzen ergeben sich jetzt ohne weiteres die folgenden Tatsachen:

$\left(\frac{\beta_1\beta_2, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\beta_1, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m \left(\frac{\beta_2, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ (*vorderer Zerlegungssatz*),

$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-b}$ [1]), wenn $\mathfrak{p}$ nicht im Führer $\mathfrak{f}(\sqrt[m]{\alpha})$ von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ enthalten ist und in β genau zum Exponenten b aufgeht, insbesondere

$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$, wenn $\mathfrak{p}$ weder in $\mathfrak{f}(\sqrt[m]{\alpha})$ noch in β enthalten ist,

$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$ (*Produktformel*),

---

[1]) Für den Fall einer unendlichen Primstelle $\mathfrak{p}$ siehe das S. 137, Anm. 1 Gesagte.

$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$ dann und nur dann, wenn β Normenrest mod. $\mathfrak{f}(\sqrt[m]{\alpha})$ von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ ist,

oder — was dasselbe — Normenrest von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ mod. jeder noch so hohen Potenz $\mathfrak{p}^r$ von $\mathfrak{p}$,

$\left(\frac{\tau\beta, \tau\alpha}{\tau\mathfrak{p}}\right)_m = \tau\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$, wenn τ ein beliebiger Isomorphismus von k ist,

$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_{m'} = \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m^{m'}$, wenn $m = m'm''$,

$\left(\frac{\beta, \alpha_1\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\beta, \alpha_1}{\mathfrak{p}}\right)_m \left(\frac{\beta, \alpha_2}{\mathfrak{p}}\right)_m$ (*hinterer Zerlegungssatz*),

$\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}^*} \left(\frac{\beta, \alpha^*}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\mathsf{N}_{kk^*}(\beta), \alpha^*}{\mathfrak{p}^*}\right)_m$, wenn k^* ein die m-ten Einheitswurzeln enthaltender Teilkörper von k ist, α^* zu k^* und β zu k gehört, und $\mathfrak{p}$ alle in der Primstelle $\mathfrak{p}^*$ von k^* enthaltenen Primstellen von k durchläuft.

Von den geläufigen Eigenschaften des Symbols $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ bleibt allein noch zu beweisen:

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} \quad (\textit{Vertauschungssatz}).$$

Diese Formel ergibt sich aber auf folgende Weise aus den beiden Zerlegungssätzen und der Normenresteigenschaft, wenn man beachtet, daß stets $-\gamma$ Norm nach k aus $k(\sqrt[m]{\gamma})$ ist [1]), daß also stets $\left(\frac{-\gamma, \gamma}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$ und $\left(\frac{-\gamma^{-1}, \gamma}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$ ist:

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{-\beta\alpha^{-1}, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{-\beta\alpha^{-1}, \beta}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\alpha^{-1}, \beta}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1}.$$

Auf Grund der vorstehenden Tatsachen erkennt man übrigens leicht die Identität des hier eingeführten Normenrestsymbols mit dem in H. auf andere Art definierten.

Jetzt kann mühelos das Reziprozitätsgesetz in klassischer Formulierung hergeleitet werden, und zwar in der scharfen und glatten Form, die ich in H. aufgestellt habe:

$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_m = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_m$, wenn die Führer $\mathfrak{f}(\sqrt[m]{\alpha})$ und $\mathfrak{f}(\sqrt[m]{\beta})$ keine Primstelle gemeinsam enthalten [2]).

Ist nämlich eine Primstelle $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{f}(\sqrt[m]{\beta})$, also nicht in $\mathfrak{f}(\sqrt[m]{\alpha})$ enthalten, so ist $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-b}$. Ist aber $\mathfrak{p}$ nicht in $\mathfrak{f}(\sqrt[m]{\beta})$ enthalten, so ist $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right)_m^{a}$.

---

[1]) Siehe *H. Hasse*, Zum expliziten Reziprozitätsgesetz, Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg **7** (1929), § 1.

[2]) Dieser glatten Formulierung zuliebe muß die S. 135, Anm. 2 angegebene allgemeinere Fassung der Definition des Artin-Symbols zugrunde gelegt werden.

Dabei bezeichnen a und b die genauen Exponenten, zu denen $\mathfrak{p}$ in α und β aufgeht. Aus der Produktformel folgt daher:

$$1 = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid \mathfrak{f}(\sqrt[m]{\beta})}^{m} \left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right)_m^{a} \cdot \prod_{\mathfrak{p}\mid \mathfrak{f}(\sqrt[m]{\beta})}^{m} \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-b}.$$

Beachtet man nun, daß a durch m teilbar ist, wenn $\mathfrak{p}$ nicht in $\mathfrak{f}(\sqrt[m]{\alpha})$ enthalten ist, und b durch m teilbar ist, wenn $\mathfrak{p}$ nicht in $\mathfrak{f}(\sqrt[m]{\beta})$ enthalten ist, so ergibt sich [1]) nach dem Fundamentalsatz der Idealtheorie, daß die beiden Produkte rechts $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_m$ und $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_m^{-1}$ sind.

[1]) Siehe dazu insbesondere die vorige Anmerkung.

Halle, 7. März 1929.

Eingegangen 7. März 1929.